Een wereldontdekking ook voor de didactiek der β-wetenschappen

Thomas Colignatus
14 juni 2012, Appendix 3 juli 2014

Inleiding

In de vierde klas van gym β in 1970 klaagde de leraar natuurkunde al dat we nog geen differentiëren hadden gehad zodat zijn uitleg nu moeilijker dan nodig werd. Het is toch wel opmerkelijk dat ik dit als leerling onthouden heb, wellicht spreekt er een grote belangstelling voor eenvoud uit. Hoe dan ook, het verschijnsel is nog niet opgelost. In hun hoofdstuk over de afgeleide in het nieuwe *Handboek wiskundedidactiek* bespreken Roorda & Daemen (2012) de 'transfer' naar andere vakken zoals natuurkunde (p124-127) en het is duidelijk dat er nog veel valt te sleutelen. Natuurkundeboeken in het VWO zijn overgestapt naar de grafische aanpak voor het verband tussen afstand en snelheid, en wellicht komt dat doordat de formele wiskundige aanpak op dat moment nog steeds ontbreekt.

Het aardige is dan dat er nu de wereldontdekking van een andere aanpak van de afgeleide bestaat. Deze aanpak is algebraïsch, is kort en krachtig en kan ook in een β-les worden uitgelegd wanneer de wiskundigen flauw blijven doen. Misschien kunnen de andere β-vakken er ook bij de wiskundigen op aandringen dat er geen reden is aan de limieten of infinitesimalen vast te houden. Het navolgende geeft een samenvattend overzicht.

De nieuwe algebraïsche aanpak staat in *A Logic of Exceptions* (2007) maar is verder uitgewerkt in *Conquest of the Plane* (2011). Velen zullen voor de zekerheid willen beginnen bij de bespreking van dit laatste door Richard Gill (Leiden, KNAW) in *Nieuw Archief voor Wiskunde*, maart 2012.

Op schouders van reuzen

Op de schouders van reuzen kijken we verder. Isaac Newton (1642-1727) en Gottfried Leibniz (1646-1712) stonden op de schouders van Archimedes (287 vC – 212 vC) en ontwikkelden de infinitesimaalrekening. Bij een verandering van snelheid kan het beschouwde tijdsinterval tot nul gereduceerd worden om de versnelling op precies het moment zelf te bepalen. Newton gebruikte zijn experimentele methode om de zwaartekrachtversnelling te analyseren, maar voor de veiligheid publiceerde hij zijn hoofdwerk met behulp van de klassieke meetkunde. Bisschop Berkeley (1685-1753) dreef de spot met het delen door verdwijnende waarden - "ghosts of departed quantities" - maar kon de vooruitgang niet tegenhouden. Cauchy (1789-1857) en Weierstraß (1815-1897) schaafden het limietbegrip bij zodat nu standaard over 'de afgeleide' wordt gesproken. Robinson (1918-1974) ontwikkelde een niet-standaard analyse met eerherstel voor die infinitesimalen. Wij allen staan op de schouders van deze reuzen en kunnen verder kijken. In 2007 ontwikkelde ik een nieuwe algebraïsche aanpak, waarin zowel limiet als infinitesimalen overbodig blijken. Zoiets tot stand brengen is een vreemde gewaarwording, dat kan ik u verzekeren, maar lees mee, en geniet.

Deze historische context kan overigens op zichzelf al onderdeel zijn van de uitleg van de nieuwe methode, zoals Vogelezang, Buck & Rehm (2010) verduidelijken dat een historische context het begrip kan bevorderen. Er is ook de paradox dat snelheid gangbaar wordt gedefinieerd op een tijdsinterval zodat Parmenides terecht kan vragen of, als snelheid in een punt niet gegeven is, hoe dit dan wel het geval kan zijn voor meer punten. Wellicht kun je voor een uitleg dan beter uitgaan van energie en momentum, waarvoor het wellicht beter voorstelbaar is dat die momentaan gegeven zijn.

Algebra

Het probleem is dat je niet door nul kunt delen. Vroege wiskundigen leerden dit met veel schade, denkelijk zoveel schade dat het een taboe werd waarin ook Newton en Leibniz gevangen raakten. Algebra en de analytische meetkunde van Descartes (1596-1650) waren destijds blijkbaar nog te jong om als methode volledig aanvaard te worden. De klassieke methoden zijn zodoende op getallen gericht met nog weinig respect voor de eigenheid van algebra.

In de algebra zijn er naast numerieke waarden ook variabelen die als zelfstandige symbolen gemanipuleerd kunnen worden. Een manipulatie als $x \times x = x^2$ doen we op de symbolen, ook al kunnen we getalswaarden aan de variabelen toekennen, met het domein van x bijvoorbeeld voor alle reële getallen en het bereik van $y = f(x) = x^2$ dan alle niet-negatieve reële getallen. Voor de algebraïsche operatie van deling maken we nu onderscheid tussen statisch resultaat en dynamisch proces. Dit is als het verschil tussen een zelfstandig naamwoord en een werkwoord. Een statisch resultaat schrijven we als y / x, d.w.z. de deling zoals we die voorheen al kenden, die aan getallen is gebonden en die niet gedefinieerd is voor $x = 0$. De dynamische deling schrijven we als y // x. Bij een dynamische deling mag je een formule vereenvoudigen, zodanig dat je x^2 // $x = x$ krijgt. In dit proces zit ook een manipulatie van het domein van geldigheid. Wanneer het domein van x ook nul bevat, dan is dit opgeschort tijdens het proces van vereenvoudiging van formule, maar het domein wordt van toepassing verklaard voor de uitkomst. Nu de dynamische deling is gegeven kunnen we meteen ook de algebraïsche definitie van de afgeleide opschrijven.

> y // x ={neem aan dat $x \neq 0$, vereenvoudig de uitdrukking y / x, verklaar het resultaat ook geldig voor $x = 0$ waarbij het domein uitgebreid wordt}. Deze definitie geldt voor variabelen zodat x // x = 1 maar voor getallen blijft gelden dat 4 // 0 = 4 / 0 = niet gedefinieerd.
>
> De afgeleide wordt dan gedefinieerd met het programma:
>
> $f\,'[x] = \mathbf{d}f / \mathbf{d}x$ = {Δf // Δx, kies daarna $\Delta x = 0$}
>
> waarin dus eerst het domein van Δx wordt uitgebreid met 0 en vervolgens daartoe beperkt. Ergo, de definitie is niet het probleem, maar de vraag is waarom je zo'n begrip zou willen gebruiken.

Vergelijk met limiet danwel infinitesimaal

De nieuwe definitie van de afgeleide beschrijft wat voor het bepalen van de afgeleide van formules feitelijk gedaan wordt. Er wordt alleen exacter opgeschreven wat echt gedaan wordt. Ook in de huidige standaard aanpak wordt al vereenvoudigd, ook al wordt er daarna een limiet omheen gelegd. Bij de algebraïsche aanpak vul je de waarde nul in, bij limieten mag dat niet. Bij limieten vul je stiekem nul in bij de vereenvoudigde breuk om de limietwaarde te ontdekken maar daarna keer je snel terug naar de oorspronkelijke uitdrukking om te verklaren dat je 'echt niet' door nul deelt. De aanpak via limieten blijkt niet nodig. In het limietbegrip wordt gezegd dat het gaat om de waarde op dat ene punt maar feitelijk wordt de omgeving erbij betrokken, en het is mooi wanneer we dat niet hoeven te doen. Ook de rare praat over infinitesimalen als 'oneindig kleine waarden' die 'naar nul verdwijnen' wordt vermeden. (Hoe het met niet-standaard analyse zit is een apart verhaal.)

De crux ligt bij de eenvoudiger notie van deling en niet bij de complexere inzichten omtrent limiet of niet-standaard analyse. Om die reden noem ik de algebraïsche definitie van de afgeleide fundamenteler. In *Conquest of the Plane* blijkt de aanpak te werken voor de stof die op de middelbare school wordt gebruikt. De methode vraagt algebra die reeds behandeld is. Hierdoor is een inzichtelijke methode beschikbaar die consistent, kort en krachtig is. Anders gezegd, een wereldontdekking. Wanneer leerlingen op school zeggen dat ze moeite met wiskunde hebben dan komt dat deels doordat de wiskunde inderdaad onnodig ingewikkeld en zelfs paradoxaal is. Vanzelfsprekend is het limietbegrip hierdoor niet overbodig, er zijn andere gevallen waarvoor het gebruikt kan worden. Niet uitgesloten is - of het is zelfs waarschijnlijk te noemen - dat er bepaalde functies zijn te construeren waarvoor de algebraïsche aanpak niet werkt zodat de aanpak van Weierstraß gebruikt moet worden, maar dit doen we sowieso op de universiteit.

Vooralsnog adviseer ik nader onderzoek want het zou onjuist zijn het onderwijs op te zadelen met nieuwe didactiek die niet getoetst is. Geen van mijn aangehaalde boeken bevat empirisch onderzoek in de zin van statistische toetsen, want in mijn lessen volg ik natuurlijk het bestaande programma. Het is wel empirisch in de zin dat het gebaseerd is op waarnemingen hoe e.e.a. didactisch verloopt, en, in de zin dat het expliciet de bedoeling is dat zulke toetsen worden ontworpen t.b.v. *evidence based education*.

Ontvangst bij didactici en leraren wiskunde

Voor wiskunde geldt vervolgens 'definitie, stelling, bewijs'. De boekbespreking door Richard Gill van *Conquest of the Plane* volgt die denkwijze en hij geeft een nette bespreking. Niet alle wiskundigen blijken zo sportief. Dit is ook mijn reden om dit artikel voor TD-beta te schrijven.

Kijk naar de jaartallen. De nieuwe aanpak staat in *A Logic of Exceptions* (2007). In zijn bespreking daarvan concentreert Gill (2008) zich op de leugenaarsparadox en Gödel, waar men alleen maar begrip voor kan hebben, want ALOE doet dit ook. Het probleem ligt erin dat ALOE ondanks deze goede recensie niet door logici en wiskundigen wordt opgepakt, terwijl men vandaaruit ook die nieuwe aanpak van de afgeleide had kunnen oppakken. De aanpak staat vervolgens in *Elegance with Substance* (2009), besproken door Limpens (2010) in *Euclides,* het blad van de NVvW. Limpens bespreekt de nieuwe aanpak van de afgeleide ook niet, maar dat is wel een omissie, want hier staat het als een belangrijke bijdrage. Limpens speelt op de man door de wonderlijke vragen op te werpen of ik een zonderling of Don Quichote zou zijn, alsof ik niet gewoon zou mogen bestaan, en alsof ik niet het dagelijks brood moet verdienen. Dan is er *Conquest of the Plane* (2011). De bespreking door Gill (2012) is weer voorbeeldig. De "bespreking" door Spandaw (2012) in *Euclides* is echter lasterlijk. Hij legt niet uit hoe de nieuwe definitie van de afgeleide eruit ziet, zodat lezers van *Euclides* na 5 jaar nog steeds niet weten hoe je het anders kunt doen. Spandaw legt wel uit hoe de traditionele definitie van de afgeleide is, alsof we dat niet zouden weten. Terwijl de algebraïsche aanpak exact is, suggereert Spandaw dat alleen de tradtionele aanpak exact zou zijn. Zie mijn bespreking van de laster, Colignatus (2012a). De redactie van Euclides en het bestuur van de NVvW grijpen niet in. Zie mijn boek *Een kind wil aardige en geen gemene getallen* (2012b) met de uitleg dat de NVvW en ook Beter Onderwijs Nederland (BON) ernstig zieke verenigingen zijn. Het aangehaalde hoofdstuk van Roorda & Daemen (2012) is ook niet zonder problemen. Ik heb hen in 2009 en 2011 ingelicht over het bestaan van de nieuwe aanpak, de oorsprong in de betere didactiek, en de relevantie voor de betere didactiek. Zij waren expliciet met de afgeleide bezig en het is niet juist dat zij de opmerking van een collega negeren. Zie mijn brief aan de president van de KNAW, Colignatus (2012c).

Conclusie

De afgeleide wordt gezien als een kroonjuweel en sommige wiskundigen accepteren niet dat er een nieuwe visie mogelijk is. Een mogelijke lijn van kritiek is dat de nieuwe aanpak onvoldoende formeel zou zijn uitgewerkt. Ongetwijfeld zal de nieuwe aanpak tot toenemende uitwerking leiden. Echter, de nieuwe definitie lijkt voldoende strak voor de beoogde didactiek op de middelbare school en het eerste universitaire jaar voor vakgebieden anders dan wiskunde. Mijn suggestie is dat andere vakgebieden inderdaad gaan kijken wat er t.a.v. de afgeleide mogelijk is, en überhaupt naar wat in het onderwijs in wiskunde aan misstanden bestaan. Ook is een parlementair onderzoek naar het onderwijs in wiskunde te adviseren maar dan schrijf ik vooral als econometrist met aandacht voor de staathuishoudkunde. Tevens adviseer ik als wetenschapper tot een boycot van Nederland totdat men leert mensen fatsoenlijk te behandelen.

Thomas Colignatus is econometrist en leraar wiskunde te Scheveningen, http://thomascool.eu en http://boycottholland.wordpress.com

Literatuur

Colignatus, Th. (2007), *A Logic of Exceptions.* Thomas Cool Consultancy & Econometrics. Zie http://thomascool.eu/Papers/ALOE/Index.html

Colignatus, Th. (2009). *Elegance with Substance.* Dutch University Press. Zie: http://thomascool.eu/Papers/Math/Index.html

Colignatus, Th. (2011). *Conquest of the Plane*. Thomas Cool Consultancy & Econometrics. Zie http://thomascool.eu/Papers/COTP/Index.html

Colignatus (2012a). Reactie in detail op de "bespreking" door Jeroen Spandaw, http://thomascool.eu/Papers/COTP/2012-02-13-Colignatus-reactie-op-Euclides-87-4-p168-170.html

Colignatus, Th. (2012b). Een kind wil aardige en geen gemene getallen. Uitgeverij MijnBestseller.nl. Zie http://thomascool.eu/Papers/AardigeGetallen/Index.html

Colignatus, Th. (2012c), Brief aan de president van de KNAW: Verzoek tot terugtrekken van het proefschrift van Gerrit Roorda en het uit de handel nemen van het Handboek Wiskundedidactiek, http://thomascool.eu/Thomas/Nederlands/Wetenschap/Brieven/2012-06-09-AanPresidentKNAW.html

Gill, R.D. (2008). Book review. A Logic of Exceptions: Using the Economics Pack Applications of Mathematica for Elementary Logic, by Thomas Colignatus Nieuw Archief voor Wiskunde 5/9 nr. 3 sept.. Zie http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2008-09-3-217.pdf

Gill, R.D. (2012). Boek review. Elegance with Substance (2009) and Conquest of the Plane (2011) byThomas Colignatus. Nieuw Archief voor Wiskunde, 5e serie, deel 13, no 1, maart, p66-68. Zie: http://www.math.leidenuniv.nl/~gill/reviewCOTP.html.

Limpens, G. (2010). Boekbespreking: Elegance with Substance. Euclides, blad van de Ned. Ver. voor Wiskundeleraren, december 2010, 86-3, p130-131, http://thomascool.eu/Papers/Math/2010-12-Euclides-86-3-p130-131-a.jpg.

Roorda, G en J. Daemen (2012). Afgeleide. In P. Drijvers et al. (2012). *Handboek wiskundedidactiek*. Epsilon Uitgaven. p109-138

Spandaw, J. (2012). Boekbespreking: Conquest of the Plane. *Euclides, blad van de Ned. Ver. voor Wiskundeleraren,* Februari 2012, 87-4, p168-170. Zie http://thomascool.eu/Papers/COTP/2012-02-13-Colignatus-reactie-op-Euclides-87-4-p168-170.html

Vogelezang, M., P. Buck en M. Rehm (2010). Twee verschillende werelden die bij elkaar horen. *Tijdschrift voor Didactiek der β-wetenschappen* 27 (2010) nr. 1 & 2, p71-89

Appendix 3 juli 2014

(1) De afwijzing van TD-Beta was:

> Date: Mon, 6 Aug 2012 14:18:08 +0000
>
> Geachte heer Cool,
>
> Ik heb uw bijdrage doorgestuurd naar een van de redactieleden om te bekijken of het in deze vorm passend is voor TD-Beta.
> Helaas is het oordeel negatief. Zie hieronder zijn commentaar:
>
> 1) Ik heb - als natuurkundige, toch kennelijk een van de doelgroepen voor dit "artikel" - geen flauw idee waar dit inhoudelijk gezien over gaat: wat is er nu "nieuw", en waarom zou dat didactisch gezien "beter" zijn? Ik mis een duidelijke uitleg daarvan, en ik mis bovendien de consequenties hiervan in een natuurkundige context (bewegingen).
> 2) Het is geen onderzoek, en dus niet iets voor TDB. Je zou met enige goede wil kunnen zeggen dat het iets is als een "conceptuele analyse" die wel onderdeel zou kunnen uitmaken van een ontwikkelingsonderzoek of een aanzet daartoe zou kunnen zijn. Die conceptuele analyse echter is - zie opmerking 1 - naar mijn idee echt onvoldoende. Het publiceren van iets als een "conceptuele analyse" in TDB is mogelijk, maar dan moet zoiets wel duidelijk in het kader van een onderzoek komen te staan, en ik heb niet de indruk dat de auteur zoiets van plan is. Alleen maar "aanbevelingen leveren" vind ik te gemakkelijk.
> 3) Alleen al vanwege de tekst onder "Ontvangst bij didactici en leraren wiskunde" en "conclusie" is dit artikel in TDB naar mijn idee niet publiceerbaar: we moeten geen platform worden voor het ventileren van allerlei persoonlijke frustraties.
>
> Nogmaals bedankt voor uw interesse in het Tijdschrift voor beta-didactiek.
> Hopelijk is het artikel wel elders te publiceren (uw benadering van het differentie quotiënt spreekt me nog steeds aan).
>
> Met vriendelijke groet,
>
> (Redactie TD-Beta)

(2) Hier is de uitspraak van KNAW-LOWI t.a.v. de lasterlijke "boekbespreking" door Jeroen Spandaw, plus mijn commentaar:

> http://thomascool.eu/Papers/COTP/LOWI/Index.html