De wenselijkheid van een parlementair onderzoek naar het onderwijs in "wiskunde" en naar wat "wiskunde" heet te zijn

Het onderwijs in wiskunde ter discussie gesteld. Wat "wiskunde" heet te zijn is vaak onlogisch. Leerlingen worden onnodig gekweld en hen wordt goed wiskundig inzicht onthouden. De economische gevolgen moeten groot zijn. Hoogleraren en docenten wiskunde blijken gangbaar niet zelf in staat de juiste diagnose te stellen. Laat het parlement ingrijpen.

Thomas Colignatus

17 april 2008

Inleiding

Wiskunde is mensenwerk. De wiskunde die gedoceerd wordt is noch perfect noch optimaal. In een ideale denkruimte zou de wiskunde perfect zijn maar onze realiteit bestaat uit dit ondermaanse. Veel van wat "wiskunde" heet te zijn blijkt bij nadere beschouwing omslachtig en zelfs onlogisch te zijn. Wanneer leerlingen en studenten moeite met "wiskunde" hebben is dat niet verbazingwekkend want zij dragen een dubbele last, met naast de pure moeite namelijk ook nog een overlast ten aanzien van omslachtigheid en onlogica. Wat in het onderwijs als "wiskunde" opgevat wordt is op natuurlijke wijze gegroeid, zodat allerlei conventies en compromissen zijn binnengeslopen, die historisch zijn te begrijpen, maar die we niet zouden kiezen wanneer we het gebouw opnieuw zouden ontwerpen met de kennis die we nu hebben. Voor mensen die in het gebouw wonen is niet te zien dat het een wonderlijk samenraapsel is. Wiskundigen zijn door hun opleiding zo geconditioneerd dat zij het rare niet meer zien. Alleen anderen die van buiten toekijken kunnen het zien, op voorwaarde natuurlijk dat zij zich niet door de bewoners laten intimideren.

Met een diploma gymnasium β oude stijl 1972 ben ik afgestudeerd aan een interfaculteit econometrie, met onderwijs in economie van de economische faculteit, statistiek van de eigen interfaculteit, en voor het onderdeel wiskunde werden de colleges en tentamens gedaan samen met de wis- en natuurkundigen. Ik weet maar heel weinig van alle wiskunde die er is maar kan gelukkig wel oordelen over het onderwerp dat ik hier aansnijd. Mijn comparatieve voordeel is dat wiskundigen dit betoog dus niet zomaar opzij kunnen schuiven maar dat ik wel iets anders tegen de wiskunde aankijk dan de wiskundigen die geheel door hun opleiding zijn geconditioneerd. Dit voordeel verandert denkelijk in een nadeel wanneer toch weer met die wiskundigen gecommuniceerd moet worden, want het zal voor hen niet eenvoudig zijn om de onlogische elementen van gegroeide tradities te doorbreken. Het aardige is natuurlijk wel dat ik op wiskundige wijze kan laten zien wat er niet klopt. Per saldo moet zo toch betere wiskunde ontstaan.

Dat wil zeggen: per saldo ontstaat zo alleen zicht op betere wiskunde, het is daarmee niet gezegd dat het bolwerk van de traditie is overwonnen. Het zou onjuist zijn dit ook aan wiskundigen over te laten want zij zijn paradoxaal genoeg nauwelijks in de positie om hun onderwerp "van buiten" te benaderen. Over het rekenonderwijs op de lagere school is onlangs het nodige te doen geweest, met name n.a.v. de staartdeling. Het huidige betoog (dat reeds eerder in de pen zat) trekt deze problematiek breder en stelt ten principale de hele wiskundige bedrijfskolom ter discussie, inclusief voortgezet en universitair onderwijs inclusief de vakdidactiek en de producenten van de leerboeken. In deze bedrijfskolom schaven wiskundigen vol liefde en toewijding met grote ratio en scherpzinnigheid aan hun vak (en ik denk dan aan collegae of aan wat ik bij wijle in het vakblad Euclides lees), maar de hoogleraren en de docenten wiskunde zijn er over al deze decennia niet in geslaagd, en dit geldt zelfs internationaal, om belangrijke omslachtigheden en onlogica uit hun vak weg te bannen. Docenten wiskunde zijn kritisch, ook op elkaar en zichzelf, maar tegelijk niet in de positie of te beperkt bereid om ter discussie te stellen wat zij onderwijzen wanneer het gaat om de omslachtige en zelfs onlogische tradities van hun vak. Dan stellen ze die namelijk niet ter discussie maar zoeken zij naar betere wegen om ook hun leerlingen te conditioneren. Waar leerlingen hier gelijk hadden met de moeite die zij met het vak hadden, zijn zij gestuit op muren van onbegrip van hun leraren. Het is onjuist om verbetering afhankelijk te laten zijn van zo'n situatie die al zo lang voortduurt. De maatschappij dient in te grijpen en orde op zaken te stellen. Een parlementair onderzoek is wel het minste. De gemankeerde "wiskunde" heeft ook gevolgen voor andere vakken die op die omslachtige en ook onlogische "wiskunde" moeten steunen. In het onderwijs wordt op deze manier veel tijd en geld verspild terwijl een thema als "Nederland kennisland" daar hinder van ondervindt. Kinderen lijden en hen wordt werkelijk wiskundig inzicht onthouden. Het is niet goed mogelijk om deze verspilling en tegenwerking te kwantificeren maar het probleem laat zich helder omschrijven en vervolgens aanpakken. Laat het parlement dat doen, spoedig en grondig.

In het navolgende kijken we eerst naar een lijst van zo'n 17 punten in de "wiskunde" die nader beschouwd onlogisch zijn. Vervolgens bekijken we hoe een leerboek wiskunde onlogisch bezig is wanneer het een ander vakgebied, economie, willen "helpen". Vervolgens moeten we constateren dat het onderwijs in onlogica zoveel onderwijstijd vergt dat het onderwijs niet toekomt aan enkele belangwekkende onderwerpen. Daarna zijn er enkele observaties omtrent de bedrijfskolom en we sluiten af met een conclusie (die in feite al gegeven is).

Voor sommigen is wereld van het onderwijs in wiskunde als een markt met volledige mededinging. Er zou geen autoriteit of monopolist zijn die bepaalt wat geldt. Het enige dat werkt is de overtuigingskracht van een auteur, waarin nu eens dit onderwerp of dan weer die aanpak in de mode komt. Dit lijkt mij niet juist gesteld. Er is een minister van Onderwijs die commissies instelt voor de vaststelling van centrale examens, voor meer vakgebieden. Er zijn organen die eindtermen vaststellen met voorbeeld examens. Er zijn uitgevers die daarop inspelen. Overtuigingskracht is nodig, zonder meer, maar er is ook verantwoordelijkheid, die ter verantwoording kan worden geroepen.

Dit betoog is erop gericht dat een parlementariër het moet kunnen begrijpen wanneer deze met goed gevolg VWO A of B heeft afgelegd. Vervolgens richt dit betoog zich ook op de bezorgde ouder met zo'n achtergrond die zich zorgen maakt over de opleiding van het kind. Vervolgens zijn er de andere vakgebieden die van de wiskunde gebruik maken, en er is de willekeurige belastingbetaler die zich verwondert hoe het geld nu weer verspild wordt. Tot slot is er de wiskundige zelf die door de lijst van punten mogelijk wakker wordt geschud en oog krijgt voor wat er aan de hand is.

Een wenk voor de lezer

Een eerdere lezer van een eerdere versie van dit betoog vond het pretentieus om te komen met voorbeelden van "wat "wiskunde" heet te zijn maar het niet is". Toch was er na die voorbeelden niet wezenlijke kritiek daarop. Het zijn niet zomaar voorbeelden want het is *voldoende bewijs* dat een parlementair onderzoek wenselijk is. Het heten "voorbeelden" omdat er ook nog andere zaken boven water kunnen (zullen) komen. Zij zijn ieder op zich gezien misschien aan te pakken zonder het parlement erbij te halen maar het geheel maakt duidelijk dat er echt iets aan de hand is. Een goed leerboek wiskunde zou er toch echt anders uit moeten zien dan wat er nu bestaat.

Er is de suggestie gedaan dat ikzelf de zaak grondiger uit zou zoeken, inclusief een onderzoek van de voorgaande decennia en de bijbehorende literatuur over veranderingen in het onderwijs in de wiskunde. Ik zie dat echter niet als mijn rol in deze. Wanneer dat parlementair onderzoek wordt gehouden dan lijkt het te adviseren zulk historisch en inhoudelijk overzicht tot stand te laten komen. Voor mij volstaan de voorbeelden omdat zij reeds in zichzelf voldoende grond vormen voor de wenselijkheid van dat parlementair onderzoek.

Een andere suggestie was dat ik in dit betoog vooral vragen zou stellen en minder stellig zou zijn ten aanzien van mogelijke oplossingen. Onmiddellijk zij toegegeven dat een betoog met prikkelende vragen natuurlijk prettiger leest, vooral voor docenten wiskunde die in dit betoog kritiek zouden kunnen lezen. Wellicht bereikt de auteur inderdaad meer door slechts vragen te stellen en de lezer zelf tot een conclusie te laten komen dat er iets zou kunnen veranderen. Toch is het niet de opzet van dit betoog om slechts vragen te stellen. Er zijn al decennia lang vragen gesteld. Er zijn kinderen tot huilen gebracht, met grote vragende ogen met tranen gevuld. Laat ons de helderheid gebruiken die in de wiskunde mogelijk is. Het onderwijs in de wiskunde faalt. Bepaalde aantallen leerlingen halen wel de eindstreep voor de traditioneel gegroeide "wiskunde" maar dat is geen inhoudelijk argument als het alleen "wiskunde" heet maar niet echt is.

Een belangrijke wenk is dat het onderstaande veel voorbeelden bevat van kwesties van notatie. Dit zijn relatief flauwe kwesties. Goede wiskunde doet men in gedachten, cq. doet het onderbewuste waarvan het bewuste mag meegenieten, en notaties hebben in dat denkproces een ondergeschikte rol. Voor communicatie en onderwijs krijgen die notaties echter een wat belangrijker rol. Juist voor de leerling die moeite heeft met wiskunde wordt de notatie belangrijk, ook omdat die juist verwarring kan veroorzaken. Dus veel voorbeelden zijn wat flauw, maar door hun flauwheid denkelijk weer extra pijnlijk omdat ze in het onderwijs allang hadden moeten zijn opgelost.

Dit komt deels ook terug bij de het onderscheid tussen "wiskunde A" en "wiskunde B". Hier zijn onderwijspakketten geschapen die tegemoetkomen aan bepaalde psychologische subgroepen. De A groep steunt meer op context voor het begrip, heeft meer een helicopterview en graaft analytisch minder diep. De B groep wordt minder lastig gevallen met context, kan misschien zelfs beter zonder, kan niet zonder overzicht maar gaat analytisch dieper. De goede wiskundige en met name de econometrist neemt de context, maakt het model, bepaalt de resultaten, en vertaalt terug, houdt overzicht en onderkent de puur wiskundige eigenschappen van het probleem. Niet ieder zal zo'n goede wiskundige zijn dus er moeten concessies gedaan worden aan wat voor de onderwijsklanten geschikt is. In die concessies spelen kwesties van notatie een belangrijke rol.

Het is alleszins gewenst dat leerlingen gevoel krijgen voor het bewijsbegrip en dat zij de kernervaring in de wiskunde ondergaan dat men leert vertrouwen op de eigen denkkracht. Zoals het vak economie in zekere zin de zelfstandigheid en tolerantie bevordert doordat gangbaar de hypothese van de consumentensouvereiniteit gebruikt wordt, zo bevordert wiskunde de vrijheid van denken doordat een bewijs uit zichzelf voortkomt en niet door een autoriteit. Maar het is niet gezegd dat dit leerproces bij alle onderwerpen moet gebeuren. Het beheersen van technieken en tonen van wiskundig inzicht is wat anders dan het vermogen alles te bewijzen. Het volstaat de samenstelling met zorg te kiezen.

Het is ook niet gezegd dat alle wiskundigen geheel blind zijn voor de kwesties die hieronder worden genoemd. Er zijn er die e.e.a. wel zien. Maar hun reactie is dan niet om de onlogica te verwijderen en de leerboeken te wijzingen, maar zij proberen dan de didactiek aan te passen zodanig dat het voor leerlingen gemakkelijker moet worden om die onlogica te leren. Terwijl dat inherent onlogisch is. Zij luisteren dan niet naar de logica van hun verstand maar naar de logica van de autoriteit van de traditie. Dit tij is te keren.

Wat "wiskunde" heet te zijn maar het niet is

Laat ik een aantal voorbeelden noemen van wat officieel "wiskunde" heet te zijn maar dat nader beschouwd omslachtig en soms zelfs onlogisch en zeer verwarrend is. De wiskunde bevat allerlei notaties die alleen werken wanneer je een soort locale schizofrenie ontwikkelt. Sommige leerlingen kunnen dat (en worden later misschien wiskundigen), maar zijn dan zo geconditioneerd dat ze niet meer zien wat ze doen. Voor de meeste leerlingen zijn de volgende punten echter zeer verwarrend. Veel kostbare onderwijstijd (en frustratie) wordt gestoken in het aanleren van leerlingen van de volgende onlogica.

(1) Verwarrende haakjes

Een van allerbelangrijkste wiskundige symbolen is het haakje. Bijv. $(a + b)(c + d)$. Nu gebruiken wiskundigen het haakje ook voor de functie $f(x)$. Dus ook $a(x)$ kan een functie zijn. Maar dat zou dan ook gelijk kunnen zijn aan $a\,x$ …Wat dan te denken van $a(c + d)$? Is dit een vermenigvuldiging of een functie ? Duidelijkheid is gewonnen door bijvoorbeeld rechte haken bij de functie te gebruiken, dus $f[x]$ (zoals in het computer algebra pakket *Mathematica*). Velen zagen het probleem eerst niet, en wanneer je ervan vertelt dan vindt men de rechte haken vaak lelijk, met name wiskundigen vinden dat. Maar het voordeel van andere haken is wel helderheid van betekenis, dus didactische winst. Wat moet winnen, de "esthetische beleving" (ontstaan na conditionering) of de accuratesse en de leersnelheid van leerlingen? Bovendien blijkt dat wiskundigen natuurlijk zelf ook in de war zouden moeten raken van de ambiguïteit van $a(c + d)$ – maar dit niet willen toegeven. De irrationaliteit van hun opstelling blijkt precies daaruit (of wanneer ze het wel toegeven maar toch de leerlingen daarmee blijven kwellen).

In de praktijk hanteren wiskundigen allerlei krommigheden om die verwarring te verminderen – maar over die krommigheden willen ze niet praten. Het zijn krommigheden als "het geldt voor iedere functie en iedere letter, maar stiekum gebruik ik alleen f", of "hiervoor schreef ik het in gedachten als functie dus het blijft zo, ook al kan het er nu anders uitzien", of "we schrijven nooit een plus-teken in een argument dus $a(c + d)$ moet wel een vermenigvuldiging zijn (behalve bij de differentie $f(x + h) - f(x)$ natuurlijk)". Het zijn deze krommigheden die de leerlboeken niet expliciet vermelden maar die de leerling zich wel eigen moet maken om niet verdwaald te raken.

Binnen een klein denkkadertje is $f(x)$ op te vatten als een functie en in een ander klein denkkadertje is $f(x)$ op te vatten als vermenigvuldiging waarbij haakjes zijn weg te werken, en klaarblijkelijk lukt het (sommige) mensen om snel te wisselen tussen die kadertjes. Misschien is het zo dat het een essentiële wiskundige vaardigheid is om met zulke krommigheden om te kunnen gaan omdat er wellicht altijd onzuiverheden aan zulke notaties kleven. Toch wordt dat niet als expliciet leerdoel genoemd. Op dit aspect komen we later terug.

In deze context mag nog genoemd worden dat er ook notaties voorkomen van (x, y) voor het tweedimensionale punt en tegelijk (x, y) voor het open interval van x tot y (exclusief deze grenzen). Er valt iets te zeggen voor punt-notatie (x, y) wanneer $f(x, y)$ de tweewaardige functie is. In genoemd computerprogramma *Mathematica* zou men eerder $[x, y\ ]$ verwachten – maar dat accepteert het programma weer niet, en daar wordt $\{x, y\}$ gebruikt met de optie om dit geordend te houden of als een ongeordende verzameling. Sommigen houden de puntsnotatie (x, y) aan en kiezen dan voor het interval haken die niet standaard op het toetsenbord aanwezig zijn. In Frankrijk zou $[x, y]$ het gesloten en $]x, y[$ het open interval zijn. Enfin, deze discussie is nog niet voltooid maar om practische redenen volgt deze auteur hier *Mathematica* voor het punt $\{x, y\}$.

Een aspect dat niet onvermeld mag blijven betreft het gebruik van de decimale punt bij de Grafische Rekenmachine en de comma in de boeken. Klaarblijkelijk leren velen hiermee om te gaan. Het is echter nodeloos complicerend en er valt veel voor te zeggen om uniform de notatie met de punt over te nemen. Weliswaar is de internationale standaard (ISO) norm de comma, maar houden grote delen van de wereld zich daar niet aan, en laat die norm dan veranderen, en niet wegens die Grafische Rekenmachine, maar wegens het gebruikelijke wiskundige gebruik van de comma. Voor een tweedimensionaal punt $\{x, y\}$ wordt de comma gebruikt, wat bij {2, 0} nog wel te begrijpen valt, maar bij {2,5, 4,32} al minder inzichtelijk wordt, zodat sommigen ook {2,5 ; 4,32} gaan schrijven. De zwakkere leerling zal steeds de vertaalstap moeten maken en verliest tijd en aandacht. Een uitdrukking als $f(2,5)$ is met de comma extra verwarrend doordat het om het punt {2, 5} kan gaan of om 2.5 (met decimale punt notatie). Weliswaar is er een groot maatschappelijk gewicht omtrent het gebruik van de comma, bijv. in juridische documenten met geldbedragen, maar het is niet evident dat het wiskunde-onderwijs daaronder moet lijden.

(2) Verwarring van plus en maal bij breuken

Wat te denken van de schrijfwijze voor tweeëneenhalf als 2½ naast een expressie als $2\sqrt{2}$? Bij dat laatste is er sprake van vermenigvuldiging $2 * \sqrt{2}$, en tweeëneenhalf is 2 + ½. Kijk inderdaad voor uzelf in de onderstaande regels wanneer 2 maal ½ verandert in 2 plus ½.

2 ½	$2\ \ \frac{1}{2}$	$x \quad y$
2 ½		$x\ \ y$
2 ½	$2\frac{1}{2}$	$x\ y$
2½		xy

Wanneer een liggende breukstreep wordt gebruikt (wat logisch is voor grotere getallen) is het relatief moeilijker om het “tegen elkaar schrijven” te beoordelen. [1] [2]

Er wordt enorm veel onderwijstijd verspild aan het aankweken van een schizofrenie bij leerlingen om de ene keer op te tellen en de andere keer te vermenigvuldigen, terwijl het in sommen vaak voorkomt dat er 2 ½ staat zodat er echt 1 moet uitkomen. Beter is het om tweeëneenhalf als 2 + ½ te schrijven, en verder geen gebruik te maken van de 2½ notatie. We schrijven tenslotte ook $2 + \sqrt{2}$ als er sprake is van optelling en geen vermenigvuldiging. Deze betere notatie sluit ook aan bij de algebra van $(a + b)(c + d)$. Natuurlijk, in de maatschappij komt de notatie 2½ voor, en wanneer een leerling bij de bakker komt en een brood ziet aangeboden voor 2½ euro, dan zouden wij willen dat de leerling dit begrijpt en niet slechts 1 euro wil betalen. Dat probleem is echter oplosbaar door in het onderwijs standaard met 2 + ½ te werken, met één les dat de bakker het volgens een oude opleiding op een andere manier schrijft (en zet er dan een mooi rood vierkantje omheen om aan te duiden dat het de “oude notatie” is). Voor de goede orde: breuken zijn dus wel heel belangrijk, alleen de huidige schrijfwijze deugt niet. Voor tussenstappen in berekeningen gebruik je ook liever 5/2 dan 2 + ½, maar voor presentatie van het eindresultaat is dat laatste de meest inzichtelijke vorm.

(3) Kleiner i.p.v. minder

Bijvoorbeeld wordt gezegd dat twee “kleiner” is dan drie (“2 < 3”) en wordt dit door wiskundigen uitgebreid naar “-100 < 3”, maar eigenlijk is -100 een absoluut groter getal. Grote verwarring ! We kunnen beter zeggen dat -100 “lager” of “minder” is en niet dat het “kleiner” is (behalve wanneer -2 kleiner is). De oplossing ligt in een duidelijker onderscheid tussen “-100 < 3” voor “lager dan” en , “3 << -100” voor “(in absolute zin) kleiner dan”, dus | 3 | < | -100 |. (In het Engels gebruikt men ook eerder “less than” en minder snel “smaller than”.)

(4) Functietabel ondersteboven

Voor grafieken hebben we x op de liggende as en y op de staande as. Maar wanneer de leerling een tabel moet maken met de punten voor een grafiek (bijv. een lijn) dan staat x weer boven en y weer onder. Er is hier een oriëntatiewisseling die verwarrend is voor jonge breinen die maar een paar stappen in het werkgeheugen hebben en die nog niet geleerd hebben om handelingen zo te compacteren dat het erin past. Waarom die onnodige drempel opwerpen ? Bovendien,

[1] Leerboeken schrijven “xy” (tegen elkaar) ook als vermenigvuldiging wordt bedoeld. In veel computerprogramma’s wordt een tegen elkaar geschreven “xy” niet gezien als vermenigvuldiging maar als een naam voor een nieuwe variabele. Dat is logisch omdat anders een groot gebrek aan variabelen zou ontstaan. Op dezelfde wijze zou het tegen elkaar schrijven van een getal en een breuk als een apart object beschouwd kunnen worden. Maar waarom zou dit dan verschillen van $2\sqrt{2}$? Het blijft beter om 2 + ½ te schrijven.

[2] Wellicht is een verborgen algorithme: “Uit deze berekening moet 2.5 komen, dus we schrijven dan 2½, en houden op verder na te denken omdat het einde van de berekening is bereikt.”

wanneer we dit voorbeeld van de lijn gebruiken, dan moet vaak een richtingscoëfficiënt worden bepaald, met Δy / Δx, en wanneer de tabel gebruik maakt van x in de bovenste rij en y in de onderste rij dan ontstaat wederom een oriëntatiewisseling. Het lijkt dan toch beter consistent ook in de tabel y boven en x onder te houden.

(5) Hetzelfde met andere woorden

Nu Δy / Δx is genoemd: een bekend leerboek blijkt hetzelfde wiskundige concept aan te duiden met deze verschillende termen: (a) richtingscoefficient, (b) differentiequotiënt, (c) gemiddelde helling, (d) de gemiddelde toename op een interval, (e) tangens. Nu is er geen bezwaar tegen een bepaalde rijkdom aan concepten opdat dit leidt tot een *Aha-Erlebnis,* zoals wanneer men ontdekt dat de geliefde ook de echtgeno(o)t(e) is (geworden), of dat de Morgenster identiek is aan de Avondster. Een oud gezegde heeft echter ook kracht, dat is: "Overdaad schaadt". Een mogelijkheid is namelijk ook dat de leerling denkt dat er iets nieuws is, maar niet ziet wat er nieuw is, en dan gaat denken er helemaal niets meer van te snappen. Wanneer leraren wiskunde hun leerlingen een jaar lang alle hoeken van het lokaal laten zien met allerlei verschillende termen die eigenlijk hetzelfde betekenen dan is dit niet noodzakelijkerwijs onderwijs maar het kan ook een onvermogen zijn om in te spelen op hoe die jonge hersenen werken. Dit aspect blijkt tamelijk fundamenteel te zijn en komt daarom hieronder terug. Hier beperken we ons dan kort tot de opmerking dat het iets te gemakkelijk is om slechts te verwijzen naar een jarenlange traditie van onderwijs. Logischerwijs geldt in dit voorbeeld van Δy / Δx dat al deze equivalente termen in tien minuten toegelicht kunnen worden, als één begrip (tangens) met een aantal eigenschappen. Wanneer daar moeilijker over gedaan moet worden dan moet dat zeer goed gedocumenteerd worden. Wellicht moet men al die perspectieven aanbieden om de hersenen uit te dagen tot groei, opdat uiteindelijk die integratie tot stand komt. Laat die stelling dan empirisch onderbouwd worden en niet als axioma gehanteerd worden. Een goede alternatieve mogelijkheid is dat leerlingen iets nog niet actief beheersen omdat ze nog niet de leeftijd/positie daarvoor hebben. Zulk actief beheersen lijkt ook vanzelf wel te groeien door het gebruik en door de natuurlijke groei van de hersenen. Nogmaals, die groei wordt ook bevorderd door een rijke omgeving, maar, definieer "rijk".

(6) Inconsistente namen voor parameters

Een bekend leerboek gebruikt ten eerste voor een lijn de notatie $y = a\,x + b$ en ten tweede voor de vierkantsvergelijking of parabool de notatie $y = a\,x^2 + b\,x + c$. Ziet u een mogelijke bron voor verwarring ? Zou het niet logischer zijn om voor de lijn $y = b\,x + c$ te nemen (zodat de "abc formule" zo kan blijven heten) ? Het is een klein verschil, en wiskundig gezien irrelevant, maar didactisch relevant voor leerlingen die de "a" associëren met de richtingscoefficient en door het verschillend gebruik in de war raken. En het heeft didactische voordelen om te kunnen zeggen dat een parabool met $a = 0$ reduceert tot een lijn. De reden dat genoemd wiskundig leerboek de notatie $y = a\,x + b$ voor de lijn gebruikt laat zich raden. Vermoedelijk komt het voort uit de volgorde van deze letters in het alfabet, en wordt de lijn eerder gepresenteerd dan de parabool. (Er is bijv. geen direct verband met de afgeleide of integraal, zoals bijv. wel geldt voor snelheid v en versnelling a). Zo'n oriëntatie op het alfabet lijkt slordig t.a.v. de didactische implicaties. Eventueel stelt de wiskundige dat de leerling moet leren dat parameters met verschillende letters aangeduid kunnen worden. In dat geval lijkt het me dat die verschillende leerdoelen beter apart aangepakt kunnen worden, en niet het begrip over de relatie tussen lijn en parabool moeten gaan verwarren. (Waarbij vervolgens ook de vraag ontstaat waarom leerlingen de Griekse letters niet mogen leren.)

(7) Lijn ondergeschikt aan functie

Men presenteert de lijn als $y = b\,x + c$ waardoor $x = m$ als een "bijzondere lijn" moet worden ingevoerd, terwijl de algemene formule toch $k\,y = b\,x + c$ is, zodat $k = 0$ en $x = m$ gewoon onder de algemene definitie valt en ook weer een gewone lijn is. De rare aanpak van de lijnen breekt op wanneer uiteindelijk lineair programmeren aan de orde komt, dan moet toch weer de algemene en juiste aanpak genoemd worden. Dit is raar en omslachtig. De dieper liggende reden voor deze aanpak van de lijnen zal wel zijn dat men leerlingen niet lastig wil vallen met het onderscheid tussen "functie" en "correspondentie". Het enige bijzondere van $k\,y = b\,x + c$ is dat y voor $k = 0$ en $x = m$ niet als functie van x geschreven kan worden. Bij een functie is er bij een waarde van x slechts 1 uitkomst van y en bij een correspondentie mogen het er meer zijn. Het is werkelijk de vraag of leerlingen dit onderscheid niet aankunnen en of we er goed aan doen om hen dit te onthouden. Sterker nog, doordat leerboeken leerlingen dit inzicht onthouden, hebben zij juist extra moeite met het "onderscheid" tussen $y = b\,x + c$ en $x = m$.

(Mogelijk zijn leerlingen zoveel tijd kwijt aan het aanleren van 2½ en de haakjes, dat ze geen tijd meer hebben voor dit onderscheid tussen functie en correspondentie …)

(8) De top van een dal

Bij een parabool wordt gesproken over een "top". Men kan zich inderdaad voorstellen dat een kegel of een puntmuts een "top" heeft. Zo'n top blijft een top ook al houd je de kegel of muts ondersteboven, hetgeen duidelijk is omdat kegel of muts niet geassocieerd zijn met een specifieke oriëntatie. Vervolgens introduceren de wiskundigen de termen "dal" en "berg" en voeren zij zo toch enige oriëntatie in. Volgens hun "beeldend" taalgebruik zijn er "dalparabolen" en "bergparabolen", terwijl iedereen weet dat alleen een berg een top heeft en een dal toch werkelijk geen top heeft. De wiskundigen hebben dus geleerd om schizofreen twee analogieën door elkaar te hutselen zonder te zien dat de combinatie waanzin is. De oplossing zit in de keuze van een ander woord, en wellicht is "draaipunt" een goed alternatief. Eventueel zullen de wiskundigen tegenwerpen dat het hier de taal is die onlogisch is, omdat een dal de vorm kan aannemen van een omgekeerde berg, maar in dat geval voeren zij de verkeerde discussie. Wanneer taalgebruik onlogisch is, is het niet zaak dat taalgebruik over te nemen, maar gaat het erom uit die zee van onlogica juist datgene te kiezen wat wel logisch is. Bovendien is het maar de vraag of het taalgebruik zo onlogisch is, want, zoals gezegd, kegel of muts hebben niet de associatie van oriëntatie, en het zijn de wiskundigen die dit niet begrepen hebben door daarnaast over berg en dal te gaan spreken. Last but not least blijkt dan later in het leerboek dat de aanduidingen "berg" en "dal" (specifiek voor parabolen) vervangen kunnen worden door de meer generieke termen "hol naar beneden" en "bol naar beneden" – zodat het helemaal een raadsel is waarom niet vanaf het begin over holle en bolle parabolen wordt gesproken (want dat scheelt een misverstand en helpt het latere generieke begrip).

(9) De cultus van het wortelteken

Een overblijfsel uit de geschiedenis is het wortelteken. Het Latijnse woord Radix werd afgekort tot R, wat geleidelijk veranderde in het wortelteken √, en dit werd veralgemeniseerd tot de p-de machtswortel. Op sommige grafische rekenmachines staat "x√" waardoor weer extra uitleg nodig is dat die "x" geen "maal" is maar de aanduiding voor hogere machtswortel. Veel uitlegtijd is nodig om de leerlingen ertoe te krijgen om de streep van de wortel door te trekken naar het juiste eindpunt, klaarblijkelijk omdat het lelijk is om $\sqrt{}(a + b)$ te schrijven (dus met haakjes). Wiskundigen lijken zich niet te kunnen voorstellen ooit zonder het wortelteken te kunnen leven. In de scholen worden leerlingen doodgegooid met wortels, totdat, opeens, het moment aanbreekt dat ze verteld wordt dat dit gewone machten zijn maar dan met breuken in het exponent. Voor wie hier onbevangen over nadenkt is dit uitermate wonderlijk. Wanneer 2^2 = 4 dan moet het toch mogelijk zijn om dan ook uit te leggen dat 2 = 4^(1/2) ? Dan hebben we dat wortelteken toch niet nodig ? Merk op: de term "wortel" is uitstekend, het gaat nu alleen om het symbool en de daarom gegroeide cultus. Dus de p-de wortel is de $1/p$-de macht. Ter verdediging van het wortelteken: de vierkantswortel heeft zijn voordelen in de meetkunde waarin men op herkenbare wijze de lengte van lijnstukken kan aanduiden, bijvoorbeeld de schuine zijde van de driehoek met rechte zijden 1, of wanneer men de zijde van een vierkant wil uitdrukken als functie van de oppervlakte. Maar deze representatie is wat anders dan het ontwerp van een geheel leerstuk over wortels waarbij het wortelteken een eigen leven gaat leiden en het inzicht in gebroken exponenten gaat belemmeren. Het volstaat om na het wortelteken over te stappen op gebroken machten. En wanneer wiskundigen niet met hun vingers van het teken voor de vierkantswortel kunnen afblijven zonder er een heel leerstuk van te maken, dan moet misschien ook die representatie in de meetkunde maar door de machtsnotatie vervangen worden. De essentie van dit vraagstuk van het gebruik van het wortelteken is wederom die van het rendement aan begrip gegeven de investering in studietijd. Waar het al veel moeite kost om leerlingen zover te krijgen om het exponent op de juiste hoogte te schrijven, nu eens niet op het lijn in het schrift maar tegen de rand van de lijn erboven, dan zou hier de tijd in gestoken mogen worden, en het resultaat daarvan benut, en verliest het wortelteken het aan efficiëntie.

(10) Vaagheid t.a.v. werkwoord versus zelfstandig naamwoord

Aandacht verdient overigens ook het resultaat tussen “proces/procedure” en “resultaat” (werkwoord versus zelfstandig naamwoord). Leerlingen zijn geneigd de wortel te zien als een bewerking en niet als het getalbegrip. Wiskundig is de conventie dat de vergelijking $x^2 = 4$ twee oplossingen heeft, $x = 2$ of $x = -2$. Leerlingen zijn geneigd om dan de wortel van 4 te nemen en te denken dat er twee oplossingen zijn, te weten $\sqrt{4} = 2$ of $\sqrt{4} = -2$, terwijl dit in de huidige wiskundige conventie onjuist is omdat $\sqrt{4}$ reeds een getal is en dan gelijk aan 2. Het misverstand bij de leerlingen is niet geheel onlogisch omdat het intoetsen van de √ op de rekenmachine toch veel van een bewerking weg heeft. Of wanneer men het met de hand zou moeten gaan benaderen. Wat het begrip in de weg staat is dat de leerlingen de notie van “correspondentie” klaarblijkelijk niet mogen weten, en dat er weinig aandacht wordt gegeven aan het spiegelen van x^2 langs de lijn $y = x$. Het zou een optie zijn om een correspondentie Bew√[.] te introduceren, de wortelbewerking, zodat nu wel x = Bew√4 leidt tot $x = 2$ of $x = -2$. Om dit generiek voor exponenten te maken zou BewExp[x, $1/n$] de bewerking kunnen zijn die twee oplossing kan opleveren, en $4^{1/2}$ weer het getal 2.

Überhaupt zou in het onderwijs in de wiskunde meer aandacht moeten worden besteed aan het onderscheid tussen proces/procedure en resultaat. Wiskundig rekenen we bijv. ook met het getal Log[2] terwijl leerlingen dan naar de rekenmachine grijpen. Pierre van Hiele heeft hier niveau’s van begrip gevonden, bijv. van het direct aanschouwelijke naar het onderkennen van eigenschappen naar het analytisch inzicht. Leerboeken kunnen leerlingen voor deze sprongen rijp maken door scherper de momenten te onderkennen waar deze spelen. T.a.v. het onderscheid tussen werkwoord en zelfstandig naamwoord gebeurt dat nog veel te weinig.

(11) Ondoorgrondelijke termen, in strijd met Simon Stevin

In het verlengde van wortels en exponenten is er de kwestie van de “logaritme”. Hier wordt een woord gebruikt dat hoogst schrikwekkend en oninzichtelijk is. Rond 1600 zorgde Simon Stevin ervoor dat in de Nederlanden meer begrijpelijke termen werden gebruikt voor de Latijnse frasen der geleerden. Zo zorgde Stevin bijvoorbeeld voor de woorden “wiskunde” en “evenwijdige lijn”. De term “logaritme” is van John Napier en komt van ná Stevin. Helaas is er nog geen wiskundige nadien opgestaan om een toegankelijker woord te verzinnen. Wellicht dat een term als “teruggevonden exponent” gebruikt kan worden. Immers, met $10^3 = 1000$ verdwijnt het exponent 3 in het resultaat (de macht) 1000 terwijl het met ${}^{10}\log(1000) = 3$ weer tevoorschijn komt. Dit “teruggevonden exponent” mag met $tge(x)$ worden genoteerd - en op de Grafische Rekenmachine in het Engels met “logarithm” (en dan heeft de vertaling iets meer inhoud dan alleen het schrijven van een “h” in het “rithm”) – hoewel ik voor het Engels voorstander zou zijn van de functie $rex(y)$ (“recovered exponent”).

(12) Zijn breuken exact ?

Veel gedoe is er om de "exactheid" van breuken en de "inexactheid" van decimalen. Hier is er natuurlijk de pijnlijke ervaring van Pythagoras, die dacht dat alles in verhoudingen was te schrijven, en die door een van zijn leerlingen getoond kreeg dat dit niet voor $\sqrt{2}$ gold (waarbij ik natuurlijk het wortelteken gebruik, omdat er verschil blijft tussen "gebruik met mate" en "overdaad", maar misschien had ik $2^{½}$ moeten schrijven om zo ook te verduidelijken dat het geen enge notatie is). En het is zo dat deze $\sqrt{2}$ met decimalen slechts is te benaderen. Maar vervolgens maakt zo'n leerboek voor de middelbare school er spagghetti van. Ten eerste geldt dat 0,25 net zo exact is als 25/100, alleen is het anders opgeschreven. Dit getal is niet "vereenvoudigd" tot ¼ maar is "vereenvoudigd" door het als decimaal op te schrijven zodat het inzichtelijker is. Ten tweede is 1/3 ook maar een benadering van $1/3 + 10^{-5}$, dus een breuk is niet per definitie exact. Ten leste zit het verschil in het gebruik van = en ≈. Het leerboek wiskunde maakt er een zooitje van en schrijft regelmatig $x = 0{,}123\ldots$ waar ≈ op z'n plaats is. Dus laat men ophouden het woord "vereenvoudigen" te misbruiken en laat men exacter worden t.a.v. het begrip "exact".

(13) Gedoe met coördinaten, complexe getallen en vectoren

Al vroeg krijgt de leerling te maken met een coördinatenstelsel, de x-as en de y-as, waarop men zijn lijntjes trekt en parabolen tekent. In een later stadium worden vectoren ingevoerd, en wordt gedaan of dit radicaal iets anders is. Ergens onderweg hebben de leerlingen ook al de Stelling van Pythagoras gehad (bij een rechte driehoek is $a^2 + b^2 = c^2$). Niets is eenvoudiger om te laten zien dat het "rekenen met vectoren" hetzelfde is als het "rekenen met coördinaten", maar nergens in het leerboek gebeurt het. Logischer lijkt het me te beginnen met het optellen van coördinaten, zoals $\{1, 2\} + \{3, 4\} = \{4, 6\}$, vervolgens de lengte van de pijlen uit te rekenen met Pythagoras, en vervolgens af te spreken dat je dit het "optellen van vectoren" kunt noemen wanneer je geleerd wilt overkomen. Dit is weer een kwestie waarbij iets dat al bekend is nog eens gepresenteerd wordt met een ander woord, en dat de neiging bestaat te doen alsof het anders is. Mijns inziens is dit voor leerlingen alleen maar verwarrend want in het onderbewuste gaat men op zoek naar wat dan nieuw en anders is, en wanneer dat niet gevonden wordt dan blijft dat onderbewuste toch zoeken of men gaat denken dat men maar dom is omdat men het niet kan vinden. Beter lijkt het om te bekennen dat er helemaal niets nieuws is, maar dan door te stoten naar een hogere dimensionele ruimte en de matrixrekening. Dan leert men tenminste nog iets. Op dezelfde wijze kan men toch vrij eenvoudig het complexe vlak introduceren, waarbij punt $z = \{x, y\} = x + i\,y = |\,z\,|\,(\cos\varphi + i \sin\varphi) = |\,z\,|\ \mathrm{Exp}[i\,\varphi] = \mathrm{Pool}[|\,z\,|, \varphi]$ alleen maar andere representaties zijn. Hier dient heel scherp de meerwaarde toegelicht te worden, anders zou toch volstaan kunnen worden met de toelichting dat het hetzelfde is. Voor een cirkelbeweging kan ook een parametrische voorstelling gebruikt worden, het hoeft niet per se op een andere manier.

(14) Nodeloos traag t.a.v. de afgeleide

Het studieprogramma doet moeilijk over de afgeleide. Bij leerlingen van de B-stroom moet die eerst geïntroduceerd worden met een (eigenlijk toch wel vaag gehouden) limietbegrip en, vooruit, bij de A-stroom mag dan volstaan worden met een gevoel voor hellingen en dan de afleidingsregels ("calculus"). Het is onduidelijk waarom men niet beide stromen eerst voorziet van die afleidingsregels en pas later met de B-stroom wat dieper ingaat op dat limietbegrip. Juister lijkt me om zeer ontspannen te blijven ten aanzien van de afgeleide en er zo snel mogelijk van gebruik te maken. De rekenregels voor de helling van een functie zijn een belangrijke ontdekking, juist omdat ze zo handig zijn en veel resultaten geven, zodat het vruchtbaar is ze zo snel mogelijk te beheersen. Dus zo snel mogelijk de winstparabool differentiëren, de afgeleide op nul stellen, en de maximale winst vinden. Waarom het werkt ? Heuristisch is het helder dat de afgeleide de helling geeft en dat die helling bij een draaipunt nul is. En tja, we gebruiken ook auto's, wekkers, tv's etcetera zonder eigenlijk te weten *hoe* het werkt. Waarom dit voor "wiskunde" anders zou zijn, is niet evident. Uiteindelijk is e.e.a. uit te leggen, maar spoedig wordt dat een specialisme, en het is niet nodig dat iedereen specialist is in het bewijzen van regels omtrent de afgeleide. Het is al een hele aardige wiskundige vaardigheid en prestatie om die regels toe te passen. Dus laten we de leerlingen niet plagen met onlogische breuken en verouderde worteltekens enzovoorts en laten we ze z.s.m. dit belangrijk wiskundig resultaat van de afgeleide beheersen. Dat voorkomt ook het ritueel waarbij leerlingen van de parabool de formule voor de "top" uit hun hoofd moeten leren, waarna ze pas later ontdekken dat ze net zo goed de regels voor de afgeleide hadden kunnen leren omdat het draaipunt dan zo kan worden uitgerekend.

Elders ga ik nog iets dieper in op het begrip van de afgeleide (ALOE, p236) waarbij het mogelijk blijkt deze eenvoudig toe te lichten en dat het gebruik van "limieten" nodeloos complex is. Maar dat zou hier te ver voeren. [3]

(15) Kansrekening wordt stiefmoederlijk behandeld

Opmerkelijk genoeg zitten kansrekening en statistiek niet bij de eindtermen van wiskunde B. Klaarblijkelijk wil de hoogleraar natuurkunde de quantummechanica zelf opbouwen. Het is een bekende waarneming dat natuurkundigen weinig begrip van statistiek hebben:

> "There appears to exist a strange miscommunication between physics and mathematics. Gill quotes Suppes: "For those familiar with the applications of probability and mathematical statistics in mathematical psychology or mathematical economics, it is surprising indeed to read the treatements of probability even in the most respected texts of quantum mechanics. ... What is surprising is that the level of treatment in both terms of mathematical clarity and mathematical depth is surprisingly low. Probability concepts have a strange and awkward appearance in quantum mechanics, as if they had been brought within the framework of the theory only as an afterthought and with apology for their inclusion." (P. Suppes, 1963). Gill suggests that this is still the case in 1998." (Zie DRGTPE 2005, p81 voetnoot 64.) [4]

Kansberekening en statistiek worden plots gebombardeerd tot "wiskunde A" onderwerpen en de leerlingen (van zowel A als B) wordt de "abstracte" notaties van de elementaire kansrekening onthouden. Dus een leerboek kan de notatie en definitie voor een conditionele kans $P[X \mid Y] = P[X, Y] / P[Y]$ achterwege laten, terwijl deze juist essentieel zijn voor het goede begrip. Sterker nog, de leerlingen krijgen de conditionele kansen voorgeschoteld in relatief ingewikkelde taalkundige constructies waardoor de helderheid geweld wordt aangedaan, terwijl wiskunde juist die helderheid zou moeten beogen. Bijvoorbeeld in een leerboek bij een kruistabel van blessures van een sportvereniging wordt het onderscheid genoemd tussen de kansen dat een willekeurig gekozen lid (a) "jonger was dan 20 jaar en meer dan één blessure had" en (b) "dat meer dan één blessure had, jonger was dan 20 jaar". Het eerste is $P[X, Y]$ en het tweede is $P[X \mid Y]$. De onvoorstelbare ellende van dit leerboek is dat het de conditionele kans dus beschrijft met een Nederlandse zin waarin een comma verschijnt, terwijl de wiskundige notatie die comma juist gebruikt voor de gezamenlijke kans, bijv. waar $p[x, y]$ de gezamenlijke kansverdeling is. Wanneer de leerling vervolgens "P(dat meer dan één blessure had, jonger was dan 20 jaar)" schrijft dan wordt het tamelijk heilloos om later de juiste formalisatie aan te leren. Bovendien veronderstelt dit leerboek nogal wat van de beheersing van het Nederlands, en is het veel helderder om zo'n conditionele kans taalkundig te omschrijven als "de kans dat een lid jonger was dan 20 jaar gegeven dat er meer dan één blessure was". Het dient in dit leerstuk over de kansrekening te gaan om de *wiskunde* van de conditionele kansen, waarbij het Nederlands gebruikt wordt als een middel tot heldere communicatie. Het dient in deze paragraaf niet te gaan over duistere wijzen waarop *in het Nederlands* op conditionele

[3] http://www.dataweb.nl/~cool/Papers/ALOE/Index.html
[4] http://www.dataweb.nl/~cool/Papers/Drgtpe/Index.html

kansen geduid kan worden. (Want inderdaad, we moeten maar hopen dat mensen die zo spreken zulks ook echt bedoelen. En om er achter te komen of ze het echt bedoelen is het gebruikelijk om in zulke discussies toe te werken naar uitdrukkingen als "*X* gegeven *Y*" die vrij zijn van misinterpretatie.)

(16) Onduidelijke dobbelsteen

Bij kansberekening is er een onderscheid tussen zuivere dobbelstenen waarvan de kansen 1/6 zijn en empirische dobbelstenen waarbij die kansen per steen op grond van frequenties kunnen worden benaderd. Veel besprekingen en vraagstukken laten het woordje "zuiver" weg maar verwachten toch dat de leerlingen "uit de context" begrijpen dat het daarom gaat. Hier ziet men het leerdoel dus schuiven. Niet langer lijkt wiskunde gericht op exactheid maar ontstaat er zoiets als "begrijpend lezen" waarbij het altijd maar een gok blijft wat de auteur bedoeld heeft. Me dunkt dat juist door voortdurend de term "zuivere dobbelsteen" te gebruiken er beter wordt bereikt wat toch het doel zou moeten zijn: abstractie van de werkelijkheid en nadenken over de combinatoriek.

(17) Goniometrie wordt nodeloos ingewikkeld gemaakt

Een laatste punt is goniometrie, het meten van hoeken, met graden, radialen, sinus, cosinus en tangens. Voor leerlingen is het al verwarrend dat de hoeken gemeten worden tegen de klok in, maar goed, wanneer het wordt uitgelegd kan men ermee leven, en helaas wordt het eigenlijk niet uitgelegd. Vervolgens wordt een hoek "gedefinieerd" als het vlakdeel tussen twee snijdende lijnen maar "gemeten" (met een dubieus onderscheid t.a.v. "definitie") ofwel met sinus, cosinus en tangens, ofwel als de boog van de eenheidscirkel. Deze boog wordt vaak opgedeeld in 360 graden, wat voortkomt uit het Babylonische idee dat het jaar zo'n 360 dagen was, en is blijven hangen doordat 360 gemakkelijk deelt door allerlei getallen. Vervolgens wordt het als een "vernieuwing" ervaren dat men de omtrek van de eenheidscirkel ook kan meten als 2 π radialen, waarbij π afgeleid is van "perimeter" (omtrek) en de verhouding geeft van omtrek tot diagonaal. Op deze wijze verliest de leerling wel de helderheid dat we al een lengtemaat hebben, de meter, en dat er een andere eenheidscirkel is, namelijk die met de omtrek van 1 meter (rondom). Bij zo'n aanpak kan de leerling gewoon de lineaal gebruiken en booglengtes uitzetten zonder moeilijk te gaan rekenen om precies op 2 π uit te komen. We rekenen dan in "slagen in het rond", met 1 slag als de norm, en bijv. een kwart slag geeft de hoek van 90 graden. Vervolgens is het logischer te werken met Θ = 2 π (hoofdletter Theta, doet denken aan de omtrek van een cirkel) zodat de straal van de omtrek-van-een-meter-cirkel gelijk blijkt aan 1 /Θ. Vervolgens zijn cosinus en sinus ondoorgrondelijke termen voor wat de leerlingen allang kennen, namelijk de x en y waarden van de punten op de eenheidscirkel, en deze coördinaten kunnen dan beter herkenbaar benoemd worden, met name als x_{ur} en y_{ur} of xur[φ] en yur[φ] (met Engels "unit radius circle" met straal 1). In dat geval is er ook aardigheid in de transformatie van de booglengte op de meter-omtrek cirkel naar de $\{x, y\}$ punten op de meter-straal cirkel. Op deze manier lijkt het toch allemaal inzichtelijker en gemakkelijker. [5]

---

[5] Zie http://www.dataweb.nl/~cool/Papers/Math/TrigRerigged.pdf

Wiskunde en economie

Een leerboek wiskunde ontwikkelt ook een visie ten opzichte van de economische wetenschap. Wiskunde A leerlingen begrijpen minder van wiskunde en moeten dus "geholpen" worden met verhaaltjes (in plaats van een adequate uitleg) (welke adequate uitleg, zie boven, overigens vaak ook aan B wordt onthouden).

Een punt is dat Alfred Marshall in het prijs-afzet diagram in de verticale as de oorzaak (prijs) opneemt en in de horizontale as het gevolg (afzet). Een bekend wiskunde leerboek (Getal en Ruimte, A1,2, deel 4, pag 9) maakt hiervan: "Bij veel economische problemen heb je te maken met een aanpak zoals in opgave 9. Daarbij blijkt er een lineair verband te bestaan tussen de prijs p en het aantal verkochte exemplaren q. (…) Deze formule heet de prijs-afzet-functie." In het plaatje ernaast wordt een lijn getoond met q op de horizontale as en p op de verticale as, zoals in de economie gebruikelijk. In het wiskundig leerboek hebben leerlingen tot dan toe echter alleen functies gehad met de oorzaak op de horizontale as en het gevolg op de verticale as. In de samenvatting (p14) wordt daarvan gemaakt: "Bij veel economische problemen blijken de prijs p en de kosten K een lineaire functie te zijn van het aantal gefabriceerde artikelen q." Men begrijpt nu dat dit een hutspot is. Bij de prijs-afzet functie is q een functie van p, maar het leerboek wiskunde (cq. de leraar wiskunde) ziet niet dat de assen zijn verwisseld, of maakt stiekum gebruikt van een inverse, en in de samenvatting worden $q[p]$ en $K[q]$ ten onrechte weer op één hoop gegooid (ten onrechte, want verschillende assen).

Leerboeken economie leggen gangbaar uit dat om historische redenen (i.e. Marshall) in de vraag- en aanboddiagrammen de oorzaak (prijs) op de verticale as staat en het gevolg (hoeveelheid) op de horizontale as. Omdat de wetenschappelijke standaard inmiddels anders is, lijkt het me dat economen hier moeten wijzigen. Het kan geen kwaad om dit reeds in het middelbare onderwijs te doen, want tegen de tijd dat de leerling het diploma heeft gehaald en toe is aan de economische vakliteratuur waarin soms het Marshall diagram staat, is die leerling in staat om de wisseling van de as beter te begrijpen. Ondertussen dienen leerboeken wiskunde (a) de wetenschappelijke standaard te volgen, (b) geen hutspot te maken van de economische modellen, (c) leerlingen duidelijk te maken hoe het zit met oorzaak/gevolg en het verschil tussen de standaard en de historische diagrammen van Marshall zoals die verschijnen in (verouderde) economieboeken.

Het is een beetje bizar dat leerboeken wiskunde zich dienstbaar opstellen aan de economische wetenschap en dan economische modellen opnemen om daarmee lijnen te trekken en winst te maximaliseren, maar dat ze tegelijkertijd niet nadenken over wat die modellen betekenen en vervolgens een hutspot maken van de presentatie daarvan – waardoor leerlingen in de war raken tussen wat het leerboek economie en het leerboek wiskunde stelt. Het is de dienstbaarheid van de kapper die u alle mogelijke stijlen aanbiedt en die uiteindelijk alleen het potmodel kan knippen.

Wat blijft liggen in het onderwijs

Terwijl de leerboeken wiskunde zich zo vullen met het stof der eeuwen en de pogingen van wiskundigen om iets van wiskunde te snappen en het netjes op te schrijven, en terwijl zo zandlopers aan studietijd tussen de vingers doorglippen, blijft er geen tijd over om andere zaken te bespreken die juist wel waard zijn om te bespreken.

(A) Ten eerste zijn er logica en verzamelingenleer, inclusief *fuzzy logic*. Hoewel deze in de boeken impliciet gebruikt worden ontbreken de formele representaties. Deze zijn evenwel cruciale intellectuele resultaten in de geschiedenis van de mensheid. Het komt bij mij over als een misdaad om dit aan leerlingen te onthouden. Het is zowel een witte-boorden criminaliteit als een "*white board*" criminaliteit. Gedurende een beperkt aantal jaren is de verzamelingenleer in het verleden al wel verplichte lesstof geweest maar dit onderwerp werd toen didactisch doodgemaakt en gereduceerd tot slechts (nodeloos ingewikkelde) notatie. Laat men het nog eens proberen. Ten aanzien van de logica kunnen we overigens niet uitgaan van een willekeurig boek maar verdient het aanbeveling om uit te gaan van de aanpak van ALOE. [6] Dit boek zelf is geschreven voor eerstejaars aan een universiteit dus niet geschikt voor het voortgezet onderwijs maar het boek herijkt wel onze kennis van de logica.

(B) Bij de meetkunde ontbreken "definitie, stelling, bewijs" structuren zoals van Euclides. Een terugkeer naar de tradities tot de jaren zestig lijkt niet nodig, want zo didactisch lijkt me die oude aanpak ook weer niet (althans, wanneer ik teruglees in "Analytische Meetkunde" van C.J. Alders dat we toen hadden), maar alles wegdoen is desastreus. Sommige wiskundigen zijn geneigd om het verdwijnen van bewijstheorie te wijten aan de druk van de economische ontwikkeling, maar evenzogoed zien we hier slechts de slappe knieën van de wiskundigen die niet voor het belang van goed onderwijs in de wiskunde zijn opgekomen. Wiskundige Groen schrijft bij een afscheid na 40 jaar onderwijs in de wiskunde:

> "In de laatste decennia is de roep dat onderwijs direct toepasbare en bruikbare kennis moet bieden steeds luider geworden. Het economische nut als de maat van alle dingen is onomstreden. Het spreken over producten in situaties waarin dat vroeger nooit gebeurde (de afgestudeerden van een universiteit, de treinenloop van de NS, een geneeskundige behandeling, een overnachting in een hotel) vinden alleen wereldvreemde onaangepaste oude stakkers nog vreemd. Dat heeft zijn weerslag gehad op de wiskundeprogramma's. Namen we vroeger genoegen met de bewering dat wiskundeonderwijs een grote vormende waarde had zonder dat we de effecten van die vormende waarde concreet konden aangeven, tegenwoordig willen we die vormende waarde aangeduid zien in herkenbare, winstgevende toepassingen. Dat heeft er ook toe geleid dat de nadruk die vroeger al direct vanaf de eerste klas van het Lyceum in de wiskunde werd gelegd op stellingen, definities en bewijzen nu grotendeels verdwenen is en is vervangen door quasi maatschappelijk relevant gereken over gasrekeningen en zichthoeken. De terugkeer van de vlakke euclidische meetkunde als context voor het oefenen van bewijsopgaven is een poging daar weer wat aan te doen, maar dat begint dan pas in de bovenbouw. Voor het ontwikkelen van de gewenste redeneervaardigheden lijkt me dat gevaarlijk laat." [7]

(C) In het onderwijs wordt vooral de "grafische rekenmachine" gebruikt. Dit is vooral een zwaktebod omdat het een relatief goedkoop apparaatje is zodat gebruik van duurdere computers en computer algebra software uitgespaard wordt. De feitelijke prijs is hoog. Leren programmeren met een serieus computerprogramma is voor leerlingen een cruciale ervaring. Men leert het denken in stapjes, het ontwerpen van iets dat werkt, en het net zolang sleutelen totdat het werkt. Onder programmeren versta ik dan niet het aanleren van het intypen van rare codes maar het werken met begrijpelijke commando's, met wiskunde als taal, zodat je kunt beargumenteren waarom het werkt. Hieronder komt deze kwestie apart terug.

(D) Taalgebruik. Wiskundigen verwaarlozen het Nederlands taalgebruik omdat ze denken dat omgangstaal een inherente warrigheid heeft terwijl het in de formules wel exact zou zijn. Dit is echter een denkwijze die haaks staat op een goede didactiek. Beter is om ook het taalgebruik scherper te maken. We hebben dit fenomeen hierboven al gezien met de voorbeelden van de "top" en de "zuivere dobbelsteen". Het verschijnsel gaat echter veel breder en dieper. Het komt ook tot uitdrukking in repetitievragen die kunnen uitblinken in ondoorgrondelijkheid maar die alleen door een specifieke interpretatie plots alle gegevens bieden om tot een antwoord te

---

[6] http://www.dataweb.nl/~cool/Papers/ALOE/Index.html

[7] Nieuw Archief Wiskunde, NAW 5/4 nr. 4 december 2003

komen. Hier wordt de leerling getoetst op het hebben van die specifieke kronkel en niet op wiskundig inzicht. Een goede vraag is exact en biedt alle informatie in alle helderheid. Daar is wiskunde namelijk voor. Redundantie is vaak een goede manier om die helderheid te bieden. Toegegeven, het is moeilijk om die helderheid te bieden en tegelijk te vermijden om het antwoord weg te geven. Toegegeven, leerlingen moeten ook leren om uit de warrige werkelijkheid de juiste gegevens te verzamelen. Maar dit zijn andere verschijnselen dan het genoemde. Wat nu in de leerboeken blijft liggen is de bijdrage van wiskunde aan zuiver taalgebruik.

(E) Nieuwe onderwerpen als fractals, chaos, encryptografie en mogelijk meer, blijven liggen terwijl zij niet voor niets zijn opgekomen.

(F) Last but not least is er de wiskunde van verkiezingen. Voor een goede democratisch besef is het noodzakelijk dat in het onderwijs aandacht wordt besteed aan de paradoxen bij verkiezingen. [8] (Van belang hierbij is dat er vaak onder wiskundigen en economen ook onjuiste inzichten hierover bestaan zodat er extra zorg nodig is bij de presentatie hiervan.)

Naast de inhoud die anders kan, is er ook de vorm die anders kan. De wiskundigen gaat blijkbaar akkoord met klassen met een omvang van soms 30 leerlingen terwijl men op zijn klompen kan aanvoelen dat klassen van maximaal 15 gewenst zijn gezien de aard van het onderwerp en de zorgvuldigheid die nodig is om een leerling goed te leren denken en redeneren. Om onduidelijke redenen gaan de wiskundigen ermee akkoord dat wiskunde als schoolvak hier hetzelfde wordt behandeld als een taal als Frans of een vak als Aardrijkskunde of als een bekwaamheid als rekenen. Met zulke belangenbehartigers kan men zeggen dat de wiskunde geen vijanden nodig heeft.

Waarop teruggekomen zou worden

Hierboven zijn enkele punten genoemd waarvan gezegd is dat daarop zou worden teruggekomen. Dat doen we hier.

(i) Een punt is de ontwikkeling van de hersenen. Hier is de laatste tijd veel om te doen. Een vraag is hoeveel zin het heeft om allerlei wiskunde in die hersenen te proberen te gieten terwijl die daar nog helemaal niet rijp voor zijn. Omgekeerd kan de situatie zo zijn dat die hersenen alleen maar groeien en de synapsen de juiste verbindingen leggen doordat zij voortdurend actief zijn om die wiskunde maar te begrijpen. In theorie zijn "randomized controlled trials" de beste manier om deze empirische vraag te beantwoorden. Maar menigeen zal niet snel zijn kinderen aanbieden als proefkonijnen om maar geen wiskunde te krijgen zolang het geen zin lijkt te hebben. Maar dit zijn algemeenheden. Hoe dan ook, op dit terrein kan veel meer gedaan worden dan momenteel lijkt te gebeuren. Maar wanneer we zulk onderzoek doen, dan liefst niet met wiskundige stof die inherent onlogisch is, maar met de helderheid en elegantie die wij van wiskunde verwachten.

(ii) Wat in het onderwijs blijft liggen, op de spaarzame uitzondering na, is het computer-ondersteund toetsen van de wiskundige kennis en vaardigheden. Hierdoor wordt de leerling een belangrijke feedback onthouden. Voor de goede orde: er zijn initiatieven zoals WIMS [9], MapleTA [10], en denkelijk Wiris in combinatie met het open source pakket Moodle [11]. Het punt is echter dat de mogelijkheden nog veel te weinig benut worden met als voornaamste oorzaken

[8] Zie http://www.dataweb.nl/~cool/Papers/VTFD/Index.html
[9] http://wims.math.leidenuniv.nl/wims/
[10] http://www.engineering.tem.nhl.nl/engineering/personeel/kamminga/
[11] http://www.wirisonline.net/

menselijke traagheid en stroperigheid. De praktijk in het onderwijs blijft de repetitie die door de docent met de hand wordt nagekeken. Dit is meestal relatief dom en tegelijk duur werk. Doordat het duur is krijgt de leerling maar weinig feedback. Doordat het zoveel tijd vergt neigt de docent er denkelijk toe zich tot de puntentelling te beperken en komt er maar zelden aan toe om op de specifieke zwakke punten van de individuele leerling in te gaan, juist ook wegens die grote klassen. Er valt een wereld te winnen door de computer veel vaker in te zetten voor routinematige toetsen. Er zijn hierbij twee hobbels te nemen. De eerste is organisatorisch. De onderwijsgevende instelling moet bereid zijn om een lokaal vrij te maken waarin computers staan, met een concierge die erop toeziet dat leerlingen onder de eigen naam inloggen en dat zij niet onderling informatie uitwisselen. Leerlingen kunnen dan op ieder door henzelf gewenst moment proberen de toets te maken, en zonodig overnieuw en overnieuw totdat het gelukt is. Hierdoor wordt het ook mogelijk om niveaus te maken (bijv. eerst gewone rekenvaardigheid voordat aan breuken wordt begonnen (item-repsonse theory)). De tweede hobbel is psychologisch. De leraren wiskunde moeten toestaan dat multiple choice vragen tot de mogelijkheden gaan behoren. Een leerling die het tien keer probeert zal allicht door de wetten van het toeval door zo'n zeef komen: maar in zo'n geval licht men die leerling eruit en praat daar eens langer mee. Zolang leraren wiskunde weigeren om te accepteren dat wiskundige vaardigheden ook op andere wijzen kunnen worden getoetst blijft hier een mogelijkheid tot grote efficiency verbetering liggen. Toegegeven zij dat pen en papier heel belangrijk zijn maar hier wordt niet gesteld dat deze afgeschaft moeten worden, slechts adequaat toegepast.

(iii) Hierboven namen we waar: "Misschien is het zo dat het een essentiële wiskundige vaardigheid is om met zulke krommigheden om te kunnen gaan omdat er wellicht altijd onzuiverheden aan zulke notaties kleven. Toch wordt dat niet als expliciet leerdoel genoemd." Niet te ontkennen valt dat het huidige onderwijs in wiskunde ertoe heeft geleid dat sommigen als Einstein nadien mooie resultaten hebben geboekt. Wellicht is de huidige wiskunde een mooie mengeling van exactheid en menselijke dwaasheid die voor de besten onder ons een ideale leertuin vormt. Toch lijkt het me dat de krommigheden het beste verwijderd kunnen worden, en dat de realiteit van het menselijk bestaan voldoende uitdagingen zal blijven bevatten.

(iv) De grafische rekenmachine is genoemd. Het apparaatje kan veel maar men kan het moeilijk "wiskunde" noemen. De kwestie is breder te nemen als de algemene vraag naar ICT toepassingen. Leerboeken zijn relatief duur omdat ze ook geleverd worden met software, maar die software is heel erg beperkt en wordt daarom relatief weinig gebruikt in de les. Er is een tendens om voor software steeds meer naar het internet te verwijzen, waar soms een bruikbare en gratis applicatie staat. Maar applicaties zijn vaak in Java en dan heel specifiek, relatief moeizaam te ontwikkelen, en er kan niet mee gebouwd en gestapeld worden. Het is, al met al, een rommeltje. Dit doet natuurlijk niet af aan de vele inspanningen van leraren wiskunde om met de beperkte hulpmiddelen toch zo goed mogelijk onderwijs met de grafische rekenmachine te verzorgen of applicaties voor het internet. Er is een hele industrie met congressen, cursussen en tijdschriften waarin van alles wordt besproken en geöptimaliseerd. Toch, hoeveel begrip en respect men hiervoor ook heeft, het blijft, zoals gezegd, een zwaktebod. De enige juiste weg is het gebruik van een serieus computer algebra pakket. Voorbeelden zijn Mathematica en Maple. Zo'n aanpak is duurder wegens het gebruik van een heuse computer en professionele software, maar dan heeft men ook wat. Niet alleen kan men nu serieus wiskunde doen maar ook zijn er twee voordelen die minder de aandacht trekken: (1) de integratie met andere vakken – omdat die wiskundige software ook daarvoor toepasbaar is, (2) het programmeren. Bij programmeren is er bijv. standaard het onderscheid tussen "gelijk stellen" ($x := 23$) en "gelijk zijn" ($x = 23$) wat voor de gebruiker een belangrijk inzicht is.

Er is een nieuw gratis en open source pakket, SAGE, op vernuftige wijze gebouwd door gebruik te maken van reeds beschikbare open source modeles, en daardoor in korte tijd al heel uitgebreid. Het lijkt veelbelovend maar mij is nog onduidelijk wat de kwaliteit (voor het onderwijs) is of kan zijn. [12] Het is met name de vraag of de SAGE "taal" goed aansluit bij het gebruik van wiskunde als taal, zoals Mathematica deze taal wel gebruikt.

De discussie over de keuze tussen een grafische rekenmachine of zo'n computer algebra pakket sleept al langer dan tien jaar. In de tussentijd heeft de grafische rekenmachine zijn weg naar de leerboeken en de eindexamens gevonden. Misschien was het een nuttige ervaring, zoals men tussen het lopen en het autorijden eerst op de fiets oefent. Fietsen is milieuvriendelijker, zo'n analogie is natuurlijk gevaarlijk, maar laten we in ieder geval een degelijk experiment opzetten waarin een flink aantal scholen geheel overgaan op een serieus computer algebra pakket.

De opmerking moet gemaakt worden dat sommige van de punten die hierboven genoemd worden ook aan de orde zijn in computer algebra pakketten. Computers hebben vanzelfsprekend ook moeite om onderscheid te maken tussen $f(x)$ als functie en $f(x)$ als vermenigvuldiging (met $f\,x$ als resultaat wanneer de haakjes wegvallen) – en om die reden gebruikt bijv. Mathematica $f[x]$ voor de functie. Op dezelfde wijze kan een computer maar moeilijk overweg met 2½ wanneer de afspraak toch is dat dit een vermenigvuldiging is die tot 1 moet leiden. Soms wordt gesteld dat computers maar simpel zijn en dat mensen meer kunnen. Dat moge zo zijn, maar in dit geval heeft de computer ons dan wel geholpen om te zien dat deze wiskundige notaties onlogisch en verwarrend zijn. We leren dat wiskundigen als mensen ook onlogisch kunnen zijn. Maar gaarne wensen we dat wiskunde exact en consistent is, en gaarne zagen we dat als de basisvoorwaarde voor didactiek. Wie met zo'n computer algebra pakket aan de gang gaat zal merken dat er nog vele andere punten zijn waarin de standaard wiskundige notaties verwarrend zijn. Ook om die reden is de introductie van een computer algebra pakket nuttig: om de leraren wiskunde te disciplineren om consistent te blijven en niet tot hun zonden terug te vallen.

De bedrijfskolom

De situatie wordt gecompliceerd door de infrastructuur die inmiddels rond het onderwijs in de wiskunde is ontstaan. De mate van specialisatie in een economie wordt bepaald door de omvang van de markt. Niet alleen zijn er leraren en educatieve uitgevers maar het onderwijs in wiskunde vormt blijkbaar zo'n grote markt dat er specialisten zijn ontstaan die zijn vrijgesteld van onderwijs om na te denken over het onderwijs in de wiskunde. Deze dames en heren hebben wiskunde gestudeerd en zijn betrokken bij het onderwijs maar staan minder vaak voor de klas, en hebben als taak om na te denken hoe het vak het beste onderwezen kan worden. Onderwijs van de wiskunde wordt dan blijkbaar wat anders dan didactiek van de wiskunde (de één meer "wat" (gebruik 2½) en de ander meer "hoe" (martel leerlingen net zo lang totdat ze op een of andere wijze ook het kunstje kunnen) ?). Er zijn vakbladen voor, in Nederland zelfs een heus instituut, het Freudenthal instituut. Wie schrijft over onderwijs in de wiskunde zou zich in theorie tot deze gemeente van wiskundigen moeten wenden. Daar zitten immers de "experts", en, hoe eerder men deze "experts" overtuigd heeft, hoe gemakkelijker in theorie nieuwe inzichten ook in de onderwijspraktijk kunnen worden toegepast.

En een blad als "Euclides" staat natuurlijk voortdurend vol met artikelen die onderwerpen kritisch tegen het licht houden, wat men kan opvatten als een teken dat er bereidheid bestaat om kritisch naar het eigen vak te kijken.

Dat is natuurlijk in theorie zo. Een en ander kan in de praktijk ingewikkelder liggen. Het bestaan van een markt wil niet bij voorbaat zeggen dat alles optimaal is. Er kan optimaliteit bestaan in de zin dat de dames en heren vakdidactici in de wiskunde een salaris verdienen en dat er artikelen worden gepubliceerd en kleurige internet sites onderhouden, maar die

[12] http://www.sagemath.org/

optimaliteit geldt dan alleen economisch, is m.a.w. geörienteerd op de portemonnaie en dit zegt nog niet dat de vakdidactiek van de wiskunde zelf reeds die optimaliteit heeft bereikt. Wanneer de markt groot genoeg is om het fenomeen te laten ontstaan maar ook relatief klein om efficient te worden dan bestaan er relatief weinig mechanismen om te bepalen wat nu wel of niet een goed product is, er bestaat een grote ruimte voor individuele afwegingen, visies kunnen verschillen, en om de pais en vree te bewaren zal men elkaar de vrijheid gunnen, zodat naast elkaar eilandjes van aparte gedachten gaan ontstaan die nauwelijks meer met elkaar communiceren.

Zelfs op de schaal van de hele wereld lijkt de markt voor het onderwijs in wiskunde nog te klein. Terwijl wiskunde bijv. voor de middelbare school toch een betrekkelijk overzichtelijk terrein zijn er duizenden aparte sites over de hele wereld waarin deze of gene iets uitlegt, en ook het kleine Nederland kent een flink aantal initiatieven. Voor een deel is het ook liefdewerk van individuele docenten maar er zijn ook subsidiegelden. Onlangs is er een initiatief tot een pagina waarin tenminste een aantal van de logo's verzameld staan, het lijkt wat, maar eigenlijk tekent dit het onvermogen. Het zelforganiserend vermogen van een markt is klein, vooral wanneer er geen duidelijk product bestaat en geen duidelijke transactie plaatsvindt (of wel een duidelijke maar dan onhandige).

Andere vakgebieden dan wiskunde hebben belang bij goed onderwijs in de wiskunde. Daarom zouden zij ook belang hebben bij een beter zicht op het functioneren van deze bedrijfskolom. Het kan zijn voordelen hebben om aan een breder publiek voor te leggen hoe e.e.a. reilt en zeilt ten aanzien van het onderwijs en de vakdidactiek van de wiskunde. Niet alleen heeft dat bredere publiek er belang bij maar ook staan zij iets verder verwijderd van de vakmatige verkokering der wiskundigen.

In dit betoog zijn allerlei inzichten naar voren gebracht waarvoor vanzelfsprekend onderbouwing gewenst is (voor "evidence based education"). Ongetwijfeld moet dit ingebracht worden binnen de bedrijfskolom, gaat dit er deel van uitmaken, wordt de kritiek tot zelfkritiek. Maar het is onjuist te denken dat deze gegevens en onderbouwing vanzelf tot stand zullen komen. De maatschappij zal dit eerst extern moeten bewerkstelligen, voordat het door de bedrijfskolom geabsorbeerd kan gaan worden.

In dit betoog wordt overigens vooral gekeken naar de hogere klassen van het VO. Vanzelfsprekend dient het hele onderwijstraject bekeken te worden. Wanneer onderwijzers van de PABO al moeite hebben met de rekentest en hun kinderen vervolgens bang gaan maken dat wiskunde moeilijk zou zijn, dan komen die met een verkeerde instelling op het VO. De kwestie van de staartdeling is aangestipt. Het is niet onredelijk te verwachten dat ook andere onderwerpen blijven liggen. Didacticus Pierre van Hiele noemt bijvoorbeeld dat leerlingen op de basisschool best met vectoren zouden kunnen leren werken, dat lijkt inderdaad doenlijk wanneer men het goed aanpakt, maar om onverklaarbare redenen gebeurt het blijkbaar nog niet. Maar ook hier geldt dat de wiskunde eerst goed dient te zijn voordat men gaat pogen het te onderwijzen.

(Over de PABO gesproken: Een klein puntje van aandacht is hier om te overwegen getallen voortaan net als tekst van links naar rechts te schrijven, in plaats van de historische Arabische rangschikking. Dus één en twintig schrijven we van links naar rechts als 12 en negen tot twaalf als 9, 01, 11, 21. Een optelling als 17 + 34 = 411 zou voor jonge kinderen overzichtelijker kunnen zijn dan de 71 + 43 = 114 die we nu doen. Maar, het is nog niet getoond dat de jeugd van Arabische herkomst een voordeel heeft, terwijl verandering van die volgorde zou eenmalig hoge kosten met zich meebrengen en de jaarlijkse baten lijken beperkt. Er lijken zaken te zijn waar we ons om historische redenen bij moeten neerleggen.)

Voor de goede orde: in deze bespreking wordt veel nadruk gelegd op kwesties van notatie, en dat is denkelijk wat flauw, omdat het toch vooral om wiskundige inzichten zou moeten gaan. Bij notaties kan men bovendien snel gaan steggelen want het toetsenbord van de tekstverwerker heeft maar een beperkt aantal symbolen – de positie van de wiskunde zelfs bij de ingenieurs die computers ontwerpen is zo zwak dat daar geen rijkdom aan toetsen wordt geproduceerd. In een prospectieve verdiepte versie van dit betoog zou de nadruk mogen verschuiven van notatie naar concepten als vorm, patronen, spiegeling, orde, regelmaat versus nonregelmaat, die de kern van de wiskunde uitmaken. Maar het is de vraag of dat op dit moment handig en verstandig is, omdat juist die notaties beoogd zijn voor de communicatie en als steun bij het leren, juist in de hele bedrijfskolom, zodat die kwesties dus wel degelijk belangrijk zijn.

Conclusie

Wie denkt dat wiskunde (in theorie) altijd logisch is, vergeet vaak dat wiskunde (zoals gepresenteerd in de boeken) ook maar mensenwerk is. Er is aan (het onderwijs in) de "wiskunde" nog veel te verbeteren, en, de wijze waarop onderwijs in de wiskunde nu georganiseerd is, leidt niet tot het gewenste resultaat.

We hebben vastgesteld:

- Het ruimtelijk inzicht van leerlingen wordt gehinderd en tegengegaan door onderschikking van de lijn aan de functie, inconsistente parameternamen, oriëntatiewisselingen bij getallen en grafiek, wonderlijke terminologie ("top van dal"), vreemde behandeling van de afgeleide, gedoe met coördinaten, vectoren, complexe getallen en goniometrie.
- Het algebraïsch inzicht en die vaardigheid worden gehinderd en tegengegaan door inconsistente haakjes, verwarring van plus en maal bij breuken, taalgebruik ("kleiner" i.p.v. "minder"), de cultus van het wortelteken, ondoorgrondelijke termen, een onhoudbare interpretatie van het begrip "exact".
- Het logisch inzicht en vermogen tot redeneren worden gehinderd en tegengegaan door bovenstaande warrigheid en door het onthouden van expliciete bespreking van logica en verzamelingenleer, door het onthouden van de basisformalisatie van het kansbegrip, en door het niet ondersteunen van redenaties via deze formalisaties.

Een van de belangrijkste menselijke eigenschappen is een voorkeur voor wat oud en vertrouwd is – en wiskundigen blijven mensen. In de wiskunde is voortdurend aandacht voor nieuwe zaken en er is veel kritiek op het vak waaronder zelfkritiek, niet alleen ten aanzien van "wat" er aan de orde komt maar ook "hoe", natuurlijk, maar bepaalde zaken blijken vastgeroest, en hier toont de sector onvoldoende vermogen om van die patronen los te komen. Bijvoorbeeld bij de oneigenlijke "breuk" 2½ ziet de leraar wiskunde en het eindexamenprogramma niet meer "wat" hier oneigenlijk aan is en richt de aandacht zich op "hoe" het dan te onderwijzen. Veel leerlingen wordt goed onderwijs in de wiskunde onthouden doordat wiskundigen deze beroepsmatig geconditioneerde blinde vlek hebben. Kernpunt van het huidige betoog is dat we beter kunnen kijken naar "wat" er als "wiskunde" te onderwijzen is. Wanneer deze "wiskunde" nader beschouwd onlogisch is dan dient men de stof te herzien. Wanneer leerlingen verkeerd materiaal voorgeschoteld krijgen dan is het onjuist om aan de didactiek van dat materiaal te sleutelen maar moet het onderwerp ten principale verbeterd worden.

Hierboven werden slechts enkele voorbeelden genoemd. Nu ik dit jaar meer lesgeef in de meer basale wiskundige vaardigheden valt het me op hoe sommige conventies minder handig zijn en nader beschouwd zelfs onjuist. Een en ander versterkt eerdere observaties die ik al sinds 1995 maak over toepassing van computer algebra in het onderwijs. De situatie wordt gecompliceerd doordat er een hele infrastructuur is ontstaan omtrent de didactiek van de wiskunde. De kwestie kan derhalve het beste gezien worden in de context van de gehele bedrijfskolom, en op die wijze aangepakt. Het parlement zou kunnen denken dat men het onderwijs in wiskunde bevordert door het vak aan de "vakdeskundigen" te laten maar dan veel subsidie ter beschikking te stellen voor zulk "vakdidactisch" onderzoek. Dit is een misvatting, men bindt de kat op het spek, en dan kan men rekenen op de roep om nog meer lesuren opdat de leerlingen nog meer onlogica kan worden onderwezen.

Kortom, we hebben hier naar mensenwerk gekeken en logischerwijs vast kunnen stellen dat het geen goden zijn. Laat ons desondanks blijmoedig blijven en hopen dat wiskundigen met plezier aan de slag gaan om alles mooier en prachtiger te maken. Laten economen hen hierbij steunen en soms het handje vasthouden en troosten wanneer de inzichten even pijnlijk zijn.

Maar laat vooral de politiek ingrijpen want de bedrijfstak kan het duidelijk niet alleen af. Een parlementair onderzoek naar deze grote maatschappelijke misstand lijkt me wel het minste.

Thomas Colignatus
Econometrist, momenteel leraar wiskunde aan de Wolfert van Borselen SG te Rotterdam
Auteur van "The Economics Pack. Applications of Mathematica" (1995, 2008)
en "A logic of exceptions" (2007)

http://www.dataweb.nl/~cool