Een wereldontdekking over de afgeleide

Thomas Colignatus
16 juli 2012 - Aangepaste links 17 april 2014

Inleiding

Er bestaat een andere aanpak van de afgeleide dan via limieten of infinitesimalen. Deze aanpak is algebraïsch. Het navolgende geeft een samenvatting. Het betreft hier nu noodzakelijkerwijs een kort overzicht en ik verwijs naar *Conquest of the Plane* (2011) voor de uitwerking. Velen zullen voor de zekerheid willen beginnen bij de bespreking van dit laatste boek door Richard Gill (Leiden, KNAW) in *Nieuw Archief voor Wiskunde*, maart 2012. De nieuwe algebraïsche aanpak dateert overigens uit *A Logic of Exceptions* (2007). De aanpak en zijn didactiek kunnen vergelegen worden met het hoofdstuk over de afgeleide in het nieuwe *Handboek wiskundedidactiek* door Roorda & Daemen (2012)

Op schouders van reuzen

Op de schouders van reuzen kijken we verder. Demokritos (460- 380/370 vC) lijkt ook ruimte alleen in atomen te kunnen denken maar Aristoteles (384-322 vC) kiest voor continuïteit en Euclides (300 vC) en Archimedes (287-212 vC) volgen de laatste. Isaac Newton (1642-1727) en Gottfried Leibniz (1646-1712) stonden op de schouders van deze reuzen en ontwikkelden afgeleide en integraal, maar met een toch wat vaag gebruik van infinitesimalen. Bij een verandering van snelheid kan het beschouwde tijdsinterval tot nul gereduceerd worden om de versnelling op precies het moment zelf te bepalen. Newton gebruikte zijn experimentele methode om de versnelling door wat hij ‘zwaartekracht’ noemde te analyseren, maar voor de veiligheid publiceerde hij zijn hoofdwerk met behulp van de klassieke meetkunde. Bisschop Berkeley (1685-1753) dreef de spot met het delen door verdwijnende waarden - “ghosts of departed quantities” - maar kon de vooruitgang niet tegenhouden. Cauchy (1789-1857) en Weierstraß (1815-1897) schaafden het limietbegrip bij zodat nu standaard over ‘de afgeleide’ wordt gesproken. Robinson (1918-1974) ontwikkelde een niet-standaard analyse met eerherstel voor die infinitesimalen. Wij allen staan op de schouders van al deze reuzen en kunnen verder kijken. In 2007 ontwikkelde ik een nieuwe algebraïsche aanpak, waarin zowel limiet als infinitesimalen overbodig blijken. Zoiets tot stand brengen is een vreemde gewaarwording, dat kan ik u verzekeren, maar lees mee, en geniet.

Algebra

Het probleem is dat je niet door nul kunt delen. Vroege wiskundigen leerden dit met veel schade, denkelijk zoveel schade dat het een taboe werd waarin ook Newton en Leibniz gevangen raakten. Algebra en de analytische meetkunde van Descartes (1596-1650) waren destijds blijkbaar nog te jong om als methode volledig aanvaard te worden. De klassieke methoden zijn zodoende op getallen gericht met nog weinig respect voor de eigenheid van algebra.

In de algebra zijn er naast numerieke waarden ook variabelen die als zelfstandige symbolen gemanipuleerd kunnen worden. Een manipulatie als $x \times x = x^2$ doen we op de symbolen, ook al kunnen we getalswaarden aan de variabelen toekennen, met het domein van x bijvoorbeeld voor alle reële getallen en het bereik van $y = f(x) = x^2$ dan alle niet-negatieve reële getallen. Voor de algebraïsche operatie van deling maken we nu onderscheid tussen statisch *resultaat* en dynamisch *proces*. Dit is als het verschil tussen een zelfstandig naamwoord en een werkwoord. Een statisch resultaat schrijven we als y / x, d.w.z. de deling zoals we die voorheen al kenden, die aan getallen is gebonden en die niet is gedefinieerd voor $x = 0$. De dynamische deling schrijven we als $y // x$. Hierbij staat y voor de teller en x voor de noemer, en daarin kunnen we complexere uitdrukkingen gedacht denken. Bij een dynamische deling mag je een formule vereenvoudigen, zodanig dat je $x^2 // x = x$ krijgt. In dit proces zit ook een manipulatie van het domein van geldigheid. Wanneer het domein van x ook nul bevat, dan is dit opgeschort tijdens het proces van vereenvoudiging van formule, maar het domein wordt van toepassing verklaard voor de uitkomst.

Nu de dynamische deling is gegeven kunnen we meteen ook de algebraïsche definitie van de afgeleide opschrijven. Dus, de crux ligt bij deling en niet bij het concept van de afgeleide als zodanig. Het probleem is niet de definitie van de afgeleide, maar de vraag is waarom je zo'n begrip zou willen gebruiken.

> $y // x$ = {neem aan dat $x \neq 0$, vereenvoudig de uitdrukking y / x, verklaar het resultaat ook geldig voor $x = 0$ waarbij het domein uitgebreid wordt}.
> Deze definitie geldt voor variabelen zodat $x // x = 1$ maar voor getallen blijft gelden dat $4 // 0 = 4 / 0$ = niet gedefinieerd. Een uitdrukking als $x - x$ is geen variabele maar constant.

De afgeleide wordt dan gedefinieerd met het programma:

$$f'[x] = \mathbf{d}f / \mathbf{d}x = \{\Delta f // \Delta x, \text{ kies daarna } \Delta x = 0\}$$

waarin dus eerst het domein van Δx wordt uitgebreid met 0 en vervolgens daartoe beperkt.

Vergelijking met limiet danwel infinitesimaal

De nieuwe definitie van de afgeleide beschrijft wat voor het bepalen van de afgeleide van formules feitelijk gedaan wordt. Er wordt alleen exacter opgeschreven wat echt gedaan wordt. Ook in de huidige standaard aanpak wordt al vereenvoudigd, ook al wordt er daarna een limiet omheen gelegd. Bij de algebraïsche aanpak vul je de waarde nul in, bij limieten mag dat niet. Bij limieten vul je stiekem nul in bij de vereenvoudigde breuk om de limietwaarde te ontdekken maar daarna keer je snel terug naar de oorspronkelijke uitdrukking om te verklaren dat je 'echt niet' door nul deelt. De aanpak via limieten blijkt niet nodig. In het limietbegrip wordt gezegd dat het gaat om de waarde op dat ene punt maar feitelijk wordt de omgeving erbij betrokken, en het is mooi wanneer we dat niet meer hoeven te doen. Ook de rare praat over infinitesimalen als 'oneindig kleine waarden' die 'naar nul verdwijnen' wordt vermeden. (Hoe het met niet-standaard analyse zit is een apart verhaal.)

De crux ligt bij de eenvoudiger notie van deling en niet bij de complexere inzichten omtrent limiet of niet-standaard analyse. Om die reden noem ik de algebraïsche definitie van de afgeleide fundamenteler. In *Conquest of the Plane* blijkt de aanpak te werken voor de stof die op de middelbare school wordt gebruikt. De methode vraagt algebra die reeds behandeld is. Hierdoor is een inzichtelijke methode beschikbaar die consistent, kort en krachtig is. Anders gezegd, een wereldontdekking. Wanneer leerlingen op school zeggen dat ze moeite met wiskunde hebben dan komt dat deels doordat de wiskunde inderdaad onnodig ingewikkeld en zelfs paradoxaal is. Vanzelfsprekend is het limietbegrip hierdoor niet overbodig, er zijn andere gevallen waarvoor het gebruikt kan worden. Niet uitgesloten is - of het is zelfs waarschijnlijk te noemen - dat er bepaalde functies zijn te construeren waarvoor de algebraïsche aanpak niet werkt zodat de aanpak van Weierstraß gebruikt moet worden, maar dit doen we sowieso op de universiteit. Je kunt een argument houden dat deze laatste aanpak om die laatste reden fundamenteler is maar wellicht ontaardt dat in fundamentalisme.

Vooralsnog adviseer ik nader onderzoek want het zou onjuist zijn het onderwijs op te zadelen met nieuwe didactiek die niet getoetst is. Geen enkele van mijn aangehaalde boeken bevat empirisch onderzoek in de zin van statistische toetsen, want in mijn lessen volg ik natuurlijk het bestaande programma. Het is wel empirisch in de zin dat het gebaseerd is op waarnemingen hoe e.e.a. didactisch verloopt. Mijn benadering is ook empirisch in de zin dat het expliciet de bedoeling is dat zulke toetsen worden ontworpen t.b.v. *evidence based education*.

Ontvangst bij didactici en leraren wiskunde

Voor wiskunde geldt vervolgens 'definitie, stelling, bewijs'. De boekbespreking door Richard Gill van *Conquest of the Plane* volgt die denkwijze en hij geeft een nette bespreking. Niet alle wiskundigen volgen de traditie.

Kijk naar de jaartallen. De nieuwe aanpak staat in *A Logic of Exceptions* (2007). In zijn bespreking daarvan concentreert Gill (2008) zich op de leugenaarsparadox en Gödel, waar men alleen maar begrip voor kan hebben, want ALOE doet dit ook. Het probleem ligt erin dat ALOE ondanks Gill's goede recensie niet door logici en wiskundigen wordt opgepakt, terwijl men vandaaruit ook die nieuwe aanpak van de afgeleide had kunnen meenemen. De aanpak staat vervolgens in *Elegance with Substance* (2009), besproken door Limpens (2010) in *Euclides*. Limpens bespreekt de nieuwe aanpak van de afgeleide ook niet. Ik ben geneigd dat als een omissie te zien want de nieuwe aanpak staat er als een belangrijke bijdrage. Limpens speelt op de man door de wonderlijke vragen op te werpen of ik een zonderling of Don Quichote zou zijn. Zulke suggestieve vragen kunnen iemand het brood uit de mond stoten. Dan is er *Conquest of the Plane* (2011). De bespreking door Gill (2012) is weer voorbeeldig. Daarnaast is er een "bespreking" door Spandaw (2012) in *Euclides,* met mijn reactie Colignatus (2012a). De redactie van *Euclides* staat me geen reactie toe in de kolommen van dit blad en dit huidige artikel is dan ook niet zo bedoeld. Wel kan men constateren dat Spandaw niet uitlegt hoe de nieuwe algebraïsche definitie van de afgeleide eruit ziet, zodat lezers van *Euclides* na 5 jaar nog steeds niet weten hoe je het anders kunt doen. Het lijkt me nuttig deze omissies nu via dit samenvattend artikel te corrigeren.

Het aangehaalde hoofdstuk van Roorda & Daemen (2012) is ook niet zonder problemen. Ik heb hen in 2009 en 2011 ingelicht over het bestaan van de nieuwe aanpak, de oorsprong in de betere didactiek, en de relevantie voor de betere didactiek. Zij waren expliciet met de afgeleide bezig en het is niet juist dat zij de opmerking van een collega negeren. Zie mijn brief aan de president van de KNAW, Colignatus (2012b).

Conclusie

De afgeleide wordt gezien als een kroonjuweel en sommige wiskundigen accepteren niet dat er een nieuwe visie mogelijk is. Een mogelijke lijn van kritiek is dat de nieuwe aanpak onvoldoende formeel zou zijn uitgewerkt. Ongetwijfeld zal de nieuwe aanpak tot toenemende uitwerking leiden. Echter, de nieuwe definitie lijkt voldoende strak voor de beoogde didactiek op de middelbare school en het eerste universitaire jaar voor vakgebieden anders dan wiskunde. Mijn suggestie is dat andere vakgebieden inderdaad gaan kijken wat er t.a.v. de afgeleide mogelijk is, en überhaupt naar wat in het onderwijs in wiskunde aan misstanden bestaan, zie Colignatus (2012c). Ook is een parlementair onderzoek naar het onderwijs in wiskunde te adviseren maar dan schrijf ik vooral als econometrist met aandacht voor de staathuishoudkunde. Tevens adviseer ik als wetenschapper tot een boycot van Nederland totdat men hier leert mensen fatsoenlijk te behandelen. Niet uit te sluiten en te hopen valt dat wiskundigen zich alsnog herinneren dat ook zij op de schouders van reuzen kunnen staan en dat Euclides toch mooi heeft uitgewerkt wat je met 'definitie, stelling, bewijs' kunt bereiken.

Thomas Colignatus is econometrist en leraar wiskunde te Scheveningen, http://thomascool.eu en http://boycottholland.wordpress.com

Literatuur

Colignatus, Th. (2007), *A Logic of Exceptions.* Thomas Cool Consultancy & Econometrics. Zie http://thomascool.eu/Papers/ALOE/Index.html

Colignatus, Th. (2009). *Elegance with Substance.* Dutch University Press. Zie: http://thomascool.eu/Papers/Math/Index.html

Colignatus, Th. (2011). *Conquest of the Plane*. Thomas Cool Consultancy & Econometrics. Zie http://thomascool.eu/Papers/COTP/Index.html

Colignatus, Th. (2012a). Reactie in detail op de “bespreking” door Jeroen Spandaw, http://thomascool.eu/Papers/COTP/2012-02-13-Colignatus-reactie-op-Euclides-87-4-p168-170.html

Colignatus, Th. (2012b), Brief aan de president van de KNAW: Verzoek tot terugtrekken van het proefschrift van Gerrit Roorda en het uit de handel nemen van het Handboek Wiskundedidactiek, http://thomascool.eu/Thomas/Nederlands/Wetenschap/Brieven/2012-06-09-AanPresidentKNAW.html

Colignatus, Th. (2012c). Een kind wil aardige en geen gemene getallen. Uitgeverij MijnBestseller.nl. Zie http://thomascool.eu/Papers/AardigeGetallen/Index.html

Gill, R.D. (2008). Book review. A Logic of Exceptions: Using the Economics Pack Applications of Mathematica for Elementary Logic, by Thomas Colignatus Nieuw Archief voor Wiskunde 5/9 nr. 3 sept.. Zie http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2008-09-3-217.pdf

Gill, R.D. (2012). Boek review. Elegance with Substance (2009) and Conquest of the Plane (2011) byThomas Colignatus. Nieuw Archief voor Wiskunde, 5e serie, deel 13, no 1, maart, p66-68. Zie: http://www.math.leidenuniv.nl/~gill/reviewCOTP.html.

Limpens, G. (2010). Boekbespreking: Elegance with Substance. Euclides, blad van de Ned. Ver. voor Wiskundeleraren, december 2010, 86-3, p130-131, http://thomascool.eu/Papers/Math/2010-12-Euclides-86-3-p130-131-a.jpg.

Roorda, G en J. Daemen (2012). Afgeleide. In P. Drijvers et al. (2012). *Handboek wiskundedidactiek*. Epsilon Uitgaven. p109-138

Spandaw, J. (2012). Boekbespreking: Conquest of the Plane. *Euclides, blad van de Ned. Ver. voor Wiskundeleraren,* Februari 2012, 87-4, p168-170. Zie http://thomascool.eu/Papers/COTP/2012-02-13-Colignatus-reactie-op-Euclides-87-4-p168-170.html