Een zestallig stelsel t/m Groep 3 ?

Thomas Colignatus
11 & 12 april 2012
http://www.dataweb.nl/~cool

Samenvatting

We zouden dit kunnen afspreken: Wanneer je de vingers telt op de rug van de hand (met de duimen in het midden) dan gebruik je een tientallig stelsel, en, wanneer je de vingers telt met de palm boven (met de duimen naar buiten) dan tel je zestallig. In een zestallig stelsel met twee handen, de rechterhand voor de eentallen 0 t/m 5 en de linkerhand voor het aantal rechterhanden, in de volgorde zoals in het Indisch-Arabisch positionele stelsel, gebruiken we nog steeds de o zo leerzame vingers, en: (a) gebruiken we een beperkt aantal symbolen en korte berekeningen voor de positieovergang, (b) kunnen we toch de rijkdom tot 36 gebruiken met serieus rekenen, en (c) gebruiken we het positionele stelsel zodat het elementaire inzicht in de structuur van getallen en het rekenen kan ontstaan, inclusief het vermenigvuldigen. Wanneer deze basis wordt gelegd tot en met Groep 3 dan lijkt de overgang daarna tot het tientallig stelsel een herhaling van zetten, relatief eenvoudig en inzichtverhogend. Dit artikel beperkt zich tot het ontwerp van een zo aantrekkelijk mogelijk stelsel en formuleert vervolgens deze belangrijke vraag voor nader empirisch onderzoek: kunnen kinderen in Groep 3 al vermenigvuldigen ?

Inleiding

Enig gevoel voor getallen is aangeboren bij veel zoogdieren en in ieder geval mensen, zie Piazza & Dehaene (2004). We leren kinderen nu op hun vingers tellen van 1 t/m 10. Milikowski (2010): “Kaufmann concludeert: rekenende hersens hebben lange tijd de vingers nodig als steuntje. Ze helpen blijkbaar om een brug te slaan tussen concreet en abstract. Dat wil zeggen: vingergebruik helpt om hersens de betekenis van de cijfers te leren.”

Er is echter een *maar*. We kunnen ons afvragen: is hier niet de verleiding van de misplaatste concreetheid, waardoor we ons blindstaren op die tien vingers, terwijl wiskundig inzicht kan leiden tot een veel beter gebruik van die vingers ? Is het op de vingers tellen van 1 t/m 10 eigenlijk geen archaisch simplisme zonder didactisch fundament ?

Die vraag leidt tot deze subvragen: (1) Is het tellen tot 10 misschien niet te hoog gegrepen en zou het tellen op basis van 5 of 6 niet kunnen volstaan om inzicht te krijgen in de betekenis van getallen en de structuur van het rekenen ? (2) Wanneer je met de linkerhand het aantal rechterhanden telt, dan tel je met deze linker vingers toch ook weer van 0 t/m 5 ? (3) Blijkt dat ‘te hoog gegrepen’ bij 10 ook niet uit het feit dat we kunstgrepen toepassen voor getallen boven 10 omdat de vingers op zijn, met daardoor de bekende lastige positieovergang ? (4) Is het gebruik van het tientallig stelsel niet een misverstand en eigenlijk zelfs fout omdat we met tien vingers eigenlijk een 11-tallig stelsel zouden mogen hebben ?

Wanneer we een zestallig stelsel gebruiken, met de rechterhand voor de eentallen 0 t/m 5 en de linkerhand voor het aantal rechterhanden, dan gebruiken we nog steeds de vingers, en bovendien: (a) gebruiken we een beperkt aantal symbolen met korte berekeningen, (b) kunnen we toch de rijkdom tot 36 gebruiken voor serieus rekenen, en (c) gebruiken we de positionele overgangen zodat het elementaire inzicht in de structuur van getallen en het rekenen kan ontstaan. Wanneer dat laatste inzicht bestaat lijkt de overgang naar het tientallig stelsel een herhaling van zetten en vooral een kwestie van oefenen. Wanneer t/m Groep 3 de basis wordt gelegd voor inzichtelijk rekenen op basis van zes, dan zou dat de overgang naar het tientallig stelsel daarna kunnen bevorderen. Wellicht zou per saldo een algehele verbetering kunnen optreden.

De kwestie blijft tentatief omdat het verder niet is onderzocht. Weinig ouders zullen hun kinderen aan zulke experimenten willen onderwerpen. Maar we kunnen proberen de redenering zo aantrekkelijk mogelijk voor te stellen. Het navolgende beperkt zich tot het ontwerp van een zo handig mogelijk zestallig stelsel dat aan zo’n onderzoek onderworpen kan worden.

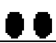
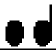
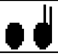
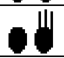
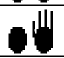
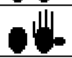
Nieuwe symbolen en namen

Ik zag tot mijn verrassing een oefening voor groep 8 met een zestallig stelsel, zie Zwijsen (2012). Ook Wisfaq (2006) besteedt aandacht aan het zestallig stelsel. Blijkbaar is meer mensen opgevallen dat het zestallig stelsel bepaalde voordelen heeft. Een enkele (grappige) les is natuurlijk heel iets anders dan gestructureerd gebruik in de laagste groepen om een basis in het rekenen te leggen. Genoemde voorbeelden maken wel duidelijk dat het gebruik van de gewone cijfers in een dubbelrol tot verwarring leidt. We kiezen derhalve nieuwe symbolen.

De symbolen en de eerste getallen

Zie Tabel 1 voor symbolen waarbij het aantal rechte zijkanten ook het getal geeft.

Tabel 1: Symbolen en de eerste zes getallen

Handen	*Symbool*	*Uitspraak*	*10-tallig*
	ø	nul	0
	I	een	1
	Γ	twee	2
	Δ	drie	3
	□	vier	4
	⌂	vijf	5

(i) Voor 2 heb ik ook Λ (hoofdletter labda) overwogen maar dit lijkt voor dyslectici teveel op Δ (hoofdletter delta). V is al Romeins 5, en ook > (groter dan) valt af omdat het beter is dit symbool voor zijn normale betekenis vrij te houden ook al wordt het op dit niveau niet gebruikt.

(ii) Rekennet (2009) heeft de duimen in het midden terwijl het me nu handiger lijkt de palmen naar het gezicht te keren zodat de duimen naar buiten steken.

Een vraag als ‘hoeveel vingers zie je ?’ gaat onderscheid verlangen tussen links en rechts. Misschien moeten we aan handschoenen gaan denken, of vingerhoedjes of elastiekjes, om de verschillende manieren van tellen aan te geven.

Maar het kan nog eenvoudiger: (a) op de rug van de hand (de duimen in het midden) tel je puur de vingers 1 t/m 10, (b) op de palmen gezien (de duimen naar buiten) tel je zestallig.

(iii) Een voordeel van een nieuw stelsel is dat we de namen systematisch kunnen kiezen. Het huidige tientallig stelsel is door traditie bepaald en we schrijven ‘19’ (van links naar rechts) maar zeggen ‘negentien’ (van rechts naar links), zie Colignatus (2012ab) en Milikowski (2008). Een optie is nu de leesvolgorde van links naar rechts aan te houden, maar de verandering naar het decimale stelsel met zijn huidige volgorde zou dan denkelijk te groot worden. Dus we houden de schrijfvolgorde aan maar kiezen de uitspraak nu conform de schrijfvolgorde.

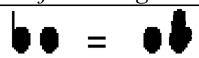
Van vijf naar zes

Hoe van vijf naar zes ? De beste keuze is dat een | op de linkerhand '(een) (rechter-) hand' wordt genoemd. Bij vijf vingers zijn de vingers gespreid, bij een hand zijn alle vingers tegen elkaar gedrukt, zie Tabel 2. De positieovergang wordt dan bereikt door de gelijkwaardigheid van een gehele rechterhand met die enkele vinger links, zie Tabel 3.

Tabel 2: Van vijf naar zes

Vijf vingers	*Een (rechter-) hand, waarde zes*
	

Tabel 3: Positieovergang

Gelijkwaardig


(i) Het was een belangrijke stap in dit ontwerp om inderdaad 'hand' te gebruiken en geen 'zes', om de betekenis van deze nieuwe eenheid te benadrukken. Ongetwijfeld heeft 'zes' een hoger abstractieniveau maar in deze tastbare fase ondersteunen we nog slechts het proces naar abstractie. De term '(een) rechterhand' is te lang als standaard maar het blijft een (handige) verduidelijking dat de vingers op de linkerhand het aantal rechterhanden tellen.

(ii) Het is een onderzoeksvraag of het beter is een vijftallig stelsel te gebruiken, waarin een volle rechterhand met vijf vingers identiek is aan een enkele vinger op de linkerhand. Hierdoor is de positieovergang misschien iets gemakkelijker, want een kind zou leren dat de vijf vingers rechts vervangen worden door een enkele vinger links. Echter, dit aanvankelijke voordeel wordt snel een hindernis, want steeds denken aan die gelijkwaardigheid gaat de optelling vertragen. Beter is uit te leggen dat na vijf vingers de hele hand komt, inclusief de palm, en dat deze hele hand wordt voorgesteld met een enkele vinger links. Zo kan de aandacht op de vingers gericht blijven. Het taalgebruik vraagt zorgvuldigheid: een hand heeft vijf vingers maar is in zijn geheel gelijk aan zes vingers. (En dat geheel wordt voorgesteld met de vingers tegen elkaar.)

(iii) Het aardige van het zestallig stelsel is bovendien de aansluiting bij de uren van de dag en het aantal maanden. Je kunt ook gaan denken aan aangepaste wijzerplaten voor klokken.

Doortellen

Zie dan Tabel 4 voor het doortellen vanaf zes. Tussen de woorden schrijven we een punt die we niet uitspreken. Een punt is beter dan een verbindingsstreepje dat immers verwarrend kan zijn t.a.v. minus.

(i) Het is een onderzoeksvraag of we ook al de namen voor de tientallige cijfers mogen geven, bijv. naast 'hand·een' ook 'zeven', en zo door tot twaalf, opdat de kinderen er al eens van gehoord hebben, en kunnen begrijpen waarom hun ouders zo raar praten. Wanneer kinderen gemakkelijk een andere taal leren dan kunnen deze andere termen niet verwarrend zijn (zolang er maar een systematiek bij de getallen zelf blijft bestaan).

Tabel 4: Samenstellingen voor hand en twee·hand

Handen	*Symbool*	*Uitspraak*	*10-tallig*
	I ø	hand	6
	I I	hand·een	7
	I Γ	hand·twee	8
	I Δ	hand·drie	9
	I □	hand·vier	10
	I ⌂	hand·vijf	11

Handen	*Symbool*	*Uitspraak*	*10-tallig*
	Γ ø	twee·hand	12
	Γ I	twee·hand·een	13
	Γ Γ	twee·hand·twee	14
	Γ Δ	twee·hand·drie	15
	Γ □	twee·hand·vier	16
	Γ ⌂	twee·hand·vijf	17

Zie Tabel 5 voor hoe de twee handen uitgeput raken bij 36 zodat in Tabel 6 wordt doorgeteld met lux = hand·hand (vanuit de luxe van een derde hand).

Tabel 5: Samenstelling voor vijf·hand

Handen	*Symbool*	*Uitspraak*	*10-tallig*
	⌂ ø	vijf·hand	30
	⌂ I	vijf·hand·een	31
	⌂ Γ	vijf·hand·twee	32
	⌂ Δ	vijf·hand·drie	33
	⌂□	vijf·hand·vier	34
	⌂⌂	vijf·hand·vijf	35

Tabel 6: Samenstelling voor lux = hand·hand

Handen	*Symbool*	*Uitspraak*	*10-tallig*
	I ø ø	lux	36
	I ø I	lux·een	37
	I ø Γ	lux·twee	38
	I ø Δ	lux·drie	39
	I ø □	lux·vier	40
	I ø ⌂	lux·vijf	41

Optellen en malen

Het aantal optellingen met uitkomst ⌂ is beperkt (ı + □ en Γ + Δ, en beide omgekeerd) zodat er snel een positieovergang is, welke ook gemakkelijk uit te rekenen is. Tabel 7 toont kolomsgewijs de optelling die ook met grotere stappen in groepjes gedaan kan worden: Δ + Δ = Δ + Γ + ı = ⌂ + ı = ıø.

Tabel 7: Kolomsgewijs optellen

Getal	Δ	□	⌂	ıø
Plus	Δ	Γ	ı	ø
Is				ıø

Het voordeel van (a) weinig symbolen, (b) toch de rijkdom tot 36, is dat snel kan worden overgegaan tot de introductie van vermenigvuldigen. In het onderwijs voor zulke jonge kinderen zou ik ‘maal’ prefereren boven ‘vermenigvuldigen’ (wat lang is) en boven ’keer’ (omdat dit ‘omdraaien’ betekent).

Het TAL-team, Treffers cs. (1999), kiest voor Groep 3 de getallen t/m 20, en introduceert maal pas in Groep 4. Reken Zeker (2012) volgt dit. Hier weegt zwaar dat het tientallig stelsel complex is met zijn tien cijfers en de rare namen zoals ‘elf’ en ‘veertien’ in plaats van ‘tien·een’ en ‘tien·vier’. (Beter is het gebruik van ‘tig’ met ‘tig·een’ en ‘tig·vier’, zie Colignatus (2012ab).) Het leren van de getallen tot en met 20 in het tientallig stelsel heeft uit zichzelf geen prioriteit. Zestallig kan tot 36 gerekend worden, en het lijkt nog steeds overzichtelijk. Tenzij uit onderzoek zou blijken dat in Groep 3 alleen begrip mogelijk is in de grootte van de getallen en niet in maal.

Het wonderlijke punt is: Wanneer kinderen in Groep 3 bovenstaand zestallig stelsel kunnen leren, dan blijkt daaruit al dat zij reeds elementair kunnen vermenigvuldigen. Immers, tellen in handen is vermenigvuldigen met zes. Kunnen zij ook andere getallen malen ?

Standaard is Γ + Γ + Γ = Δ × Γ = ıø, waarbij ook kan worden stilgestaan bij Δ + Δ = Γ × Δ = ıø, en waarbij aan de hand van de oppervlakte van een rechthoek kan worden getoond dat maal commutatief (verwisselbaar) is.

Wanneer er vijf katten zijn met elk twee ogen, dan zijn er Γ + Γ + Γ + Γ + Γ = ⌂ × Γ = ı□ ogen in het totaal. Met vijf katten heb je vijf linker ogen en vijf rechter ogen, en ⌂ + ⌂ = Γ × ⌂ = ı□.

Het lijkt te leren voor veel kinderen van zes. Voldoende kinderen voor algemene invoering ?

Het tellen van het aantal Γ is natuurlijk wel weer een hoger Van Hiele niveau. Tellen is het aftikken van elementen in een verzameling, en het is een hoger abstractieniveau om die verzamelingen als eenheden te gaan zien, en dan die verzamelingen af te tikken.

Het volgende is een belangrijk inzicht ten aanzien van maal: Een uitkomst als 5 × 2 = 10 is voor ons triviaal alleen maar omdat we dit uit ons hoofd hebben geleerd. Een stelling alsof de tafel van maal niet uit het hoofd geleerd hoeft te worden komt in conflict met de logica. Leer je het niet uit je hoofd dan blijf je gevangen in de wereld van het tellen, en dat is heel erg traag en draagt niet bij tot het betere begrip. Immers, maal is:

(1) Weten wat het voorstelt: het nemen van een verzameling van verzamelingen
(2) Weten hoe je afzonderlijke elementen telt maar handiger alleen de randtotalen
(3) Snel opzoeken in de juiste tabel (namelijk × in plaats van +)
(4) Nog sneller doordat de tabel uit het hoofd is geleerd.

Een berekening als ıı × ıΓ = ıΔΓ bevat bewerkingen die ook op dit niveau leerbaar lijken. In Tabel 8 neem ik deze hoge getallen om het minder triviaal te maken, Groep 3 zal lagere getallen gebruiken. Maar tot hoe hoog kunnen we gaan ? Interessant is ıø × ıø = ıøø maar ıı × ıı = ı Γı zou instructief blijven.

Tabel 8: De berekening van 7 maal 8

IΓ		6 + 2 = 8
II	×	6 + 1 = 7
IΓ		6 + 2 = 8
IΓø	+	36 + (2 × 6) = 48
IΔΓ		36 + (3 × 6) + 2 = 56

In deze berekening blijkt het voordeel van kennis van maal: wie weet wat maal is, beseft ook beter hoe de getallen zijn opgebouwd, en beseft ook beter wat ‘rekenen’ is (het verzamelen van de gewichten van de machten van het basisgetal). Om die reden is het didactisch wenselijk om zo snel mogelijk de beschikking te krijgen over maal.

Tafels

Tabel 9 geeft de tafel van optelling en Tabel 10 die van maal. Voor het tientallig stelsel is het uit het hoofd leren van de tafels aan te bevelen, zie Milikowski (2004 & 2006), maar voor dit zestallig stelsel zou ik daarmee terughoudend zijn omdat later die andere tafels komen. In dit stadium volstaat de vaardigheid om een uitkomst in een tabel op te zoeken, en het inzicht dat de tafels samenhangen en een structuur hebben (bijv. de diagonalen). Zoek bijv. in beide tabellen Δ + Δ + Δ = Δ × Δ.

Tabel 9: Tafel van optelling van 1 t/m 12

+	I	Γ	Δ	□	⌂	Iø	II	IΓ	IΔ	I□	I⌂	Γø
I	Γ	Δ	□	⌂	Iø	II	IΓ	IΔ	I□	I⌂	Γø	ΓI
Γ	Δ	□	⌂	Iø	II	IΓ	IΔ	I□	I⌂	Γø	ΓI	ΓΓ
Δ	□	⌂	Iø	II	IΓ	IΔ	I□	I⌂	Γø	ΓI	ΓΓ	ΓΔ
□	⌂	Iø	II	IΓ	IΔ	I□	I⌂	Γø	ΓI	ΓΓ	ΓΔ	Γ□
⌂	Iø	II	IΓ	IΔ	I□	I⌂	Γø	ΓI	ΓΓ	ΓΔ	Γ□	Γ⌂
Iø	II	IΓ	IΔ	I□	I⌂	Γø	ΓI	ΓΓ	ΓΔ	Γ□	Γ⌂	Δø
II	IΓ	IΔ	I□	I⌂	Γø	ΓI	ΓΓ	ΓΔ	Γ□	Γ⌂	Δø	ΔI
IΓ	IΔ	I□	I⌂	Γø	ΓI	ΓΓ	ΓΔ	Γ□	Γ⌂	Δø	ΔI	ΔΓ
IΔ	I□	I⌂	Γø	ΓI	ΓΓ	ΓΔ	Γ□	Γ⌂	Δø	ΔI	ΔΓ	ΔΔ
I□	I⌂	Γø	ΓI	ΓΓ	ΓΔ	Γ□	Γ⌂	Δø	ΔI	ΔΓ	ΔΔ	Δ□
I⌂	Γø	ΓI	ΓΓ	ΓΔ	Γ□	Γ⌂	Δø	ΔI	ΔΓ	ΔΔ	Δ□	Δ⌂
Γø	ΓI	ΓΓ	ΓΔ	Γ□	Γ⌂	Δø	ΔI	ΔΓ	ΔΔ	Δ□	Δ⌂	□ø

Tabel 10: Tafel van maal van 1 t/m 12

×	I	Γ	Δ	□	⌂	Iø	II	IΓ	IΔ	I□	I⌂	Γø
I	I	Γ	Δ	□	⌂	Iø	II	IΓ	IΔ	I□	I⌂	Γø
Γ	Γ	□	Iø	IΓ	I□	Γø	ΓΓ	Γ□	Δø	ΔΓ	Δ□	□ø
Δ	Δ	Iø	IΔ	Γø	ΓΔ	Δø	ΔΔ	□ø	□Δ	⌂ø	⌂Δ	Iøø
□	□	IΓ	Γø	Γ□	ΔΓ	□ø	□□	⌂Γ	Iøø	Iø□	IIΓ	IΓø
⌂	⌂	I□	ΓΔ	ΔΓ	□I	⌂ø	⌂⌂	Iø□	IIΔ	IΓΓ	IΔI	I□ø
Iø	Iø	Γø	Δø	□ø	⌂ø	Iøø	IIø	IΓø	IΔø	I□ø	I⌂ø	Γøø
II	II	ΓΓ	ΔΔ	□□	⌂⌂	IIø	IΓI	IΔΓ	I□Δ	I⌂□	Γø⌂	ΓΓø
IΓ	IΓ	Γ□	□ø	⌂Γ	Iø□	IΓø	IΔΓ	I□□	Γøø	ΓIΓ	ΓΓ□	Γ□ø
IΔ	IΔ	Δø	□Δ	Iøø	IIΔ	IΔø	I□Δ	Γøø	ΓIΔ	ΓΔø	Γ□Δ	Δøø
I□	I□	ΔΓ	⌂ø	Iø□	IΓΓ	I□ø	I⌂□	ΓIΓ	ΓΔø	Γ□□	ΔøΓ	ΔΓø
I⌂	I⌂	Δ□	⌂Δ	IIΓ	IΔI	I⌂ø	Γø⌂	ΓΓ□	Γ□Δ	ΔøΓ	ΔΓI	Δ□ø
Γø	Γø	□ø	Iøø	IΓø	I□ø	Γøø	ΓΓø	Γ□ø	Δøø	ΔΓø	Δ□ø	□øø

Voor- en nadelen

Samengevat zijn de voordelen van een zestallig stelsel voor Groep 3:

(1) Een beperkt aantal symbolen die nieuw en inzichtelijk kunnen worden gekozen
(2) Het aantal berekeningen voor de positieovergang is beperkter en zichtbaarder
(3) Berekeningen kunnen op twee handen, en bovendien rechts voor de eentallen en links voor het aantal rechterhanden, in dezelfde volgorde (van rechts naar links) zoals in het tientallig stelsel
(4) Er blijft dezelfde getalstructuur zoals voor het tientallig stelsel
(5) De uitspraak van de getallen is niet gedicteerd door traditie zoals in het tientallig stelsel en kan systematisch gekozen worden
(6) Maal kan sneller worden ingevoerd waardoor eerder inzicht ontstaat op de getalstructuur en het rekenen (*a* + *b* × hand + *c* × lux + …).

De nadelen van een zestallig stelsel zijn:

(1) Het is alleen didactisch bedoeld en wordt niet in de praktijk gebruikt
(2) Een vraag als ‘hoeveel vingers zie je ?’ gaat onderscheid verlangen tussen links en rechts, rug en palm.
(3) Mogelijk is het per saldo verwarrend t.a.v. het latere leren van het tientallig stelsel.

Conclusies

Ik heb er een hard hoofd in dat dit zestallig stelsel inderdaad in de eerste drie groepen gebruikt gaat worden. De problemen in het onderwijs in rekenen hebben grotendeels een andere oorzaak dan het getallenstelsel. Milikowski (2004) wijst bijv. op een gegroeid misverstand dat tafels uit het hoofd leren onder alle omstandigheden dodelijk zou zijn voor inzicht en creativiteit. Wanneer we zulke misverstanden kunnen wegwerken dan zou de verandering op het getallenstelsel zelf een marginale bijdrage kunnen zijn. Dat gezegd zijnde blijft het nadenken over het getallenstelsel hoe dan ook een bijdrage.

Er zijn bibliotheken over getallen en rekenen volgeschreven maar deze bespreking lijkt desalniettemin een paar nuttigheden op te leveren:

(1) Het voorgaande zestallig stelsel heeft een aantrekkelijke vorm, zowel door de stroomlijning als door een minimum aan verwarring t.a.v. het tientallig stelsel. Als je een zestallig stelsel gebruikt, gebruik dan dit.
(2) Het bovenstaande schept perspectief op het voorstel ‘tig’ als basisgetal voor het tientallig stelsel te gaan gebruiken, zie Colignatus (2012ab).
(3) Bij onderzoek in zowel didactiek als hersenen zou met meer voorrang kunnen worden gekeken of Groep 3 al kan vermenigvuldigen. Wanneer kinderen in Groep 3 bovenstaand zestallig stelsel kunnen leren, dan blijkt daaruit reeds dat zij elementair kunnen vermenigvuldigen. Immers, tellen in handen is vermenigvuldigen met zes. Een som als Γ × Iø + □ = Γ□ (oftewel 2 × 6 + 4 = 16) zou te doen moeten zijn en de structuur van getallen tonen. Kunnen zij ook andere getallen malen ? Vijf katten met elk twee ogen geeft vijf maal twee is hand·vier of tien ogen. Het lijkt doenlijk. Dit moet dan uitgebuit worden voor het inzicht in getallen en rekenen.
(4) Bovenstaande bespreking zou kunnen helpen de leerdoelen iets scherper te stellen. Bijvoorbeeld al vanaf Groep 4 meer sommen die de getalstructuur tot uitdrukking brengen, zoals 2 × 10 + 4 = 24.

Literatuur

Colignatus is de wetenschappelijke naam van Thomas Cool, econometrist en leraar wiskunde te Scheveningen

Colignatus (2012a), 'Nederlands als een dialect van wiskunde', http://www.dataweb.nl/~cool/Papers/Math/2012-03-31-NederlandsAlsDialectVanWiskunde.html
Colignatus (2012b), 'Enzovoorts Marcus', http://www.dataweb.nl/~cool/Papers/Math/2012-03-29-EnzovoortsMarcus.pdf (Mogelijk betere titel: 'Marcus leert rekenen met tig')
Milikowski, M. (2004), 'Pleidooi voor de tafels', http://www.rekencentrale.nl/Recent/pleidooi_voor_de_tafels.pdf
Milikowski, M. (2006), 'Dyscalculicus loopt vast tussen cijfer en getal', Panamapost 25, no 4, winter, p11-16, www.rekencentrale.nl/Recent/Panamapost.pdf
Milikowski, R. (2008), 'Kolomsgewijs rekenen: terug naar de 12e eeuw', http://www.rekencentrale.nl/Recent/Terug_naar_de_twaalde_eeuw.pdf
Milikowski, M. (2010), 'Goed zo, tel maar op je vingers', balans magazine, oktober, p43, http://www.rekencentrale.nl/Recent/Vingers.pdf
Treffers, A. cs. (1999), 'Jonge kinderen leren rekenen. Tussendoelen annex leerlijnen', Wolters Noordhoff
Piazza, M. & S. Dehaene (2004), 'From number neurons to mental arithmetic: the cognitive neuroscience of number sense'. In M. Gazzaniga (2004), 'The Cognitive Neurosciences', 3rd edition, http://www.unicog.org/publications/PiazzaDehaene_ChapGazzaniga.pdf
Rekennet (2009), http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00203/handentijd.html
Reken Zeker (2012), http://www.noordhoffuitgevers.nl/wps/wcm/connect/9f920e004782968bbd62fdd1ac9d8dfd/RekenZeker_leeerstof+overzichten.pdf?MOD=AJPERES
Wisfaq (2006), http://www.wisfaq.nl/showfaq3.asp?Id=2688
Zwijsen, Uitgeverij (2012), 'Het Land van Zes (groep 8)', http://www.kinderenlerenrekenen.nl/paged/547/rekenles:%20het%20land%20van%20zes/