

Reactie op Spandaw's "Boekbespreking" van COTP

Thomas Colignatus
9 Februari, 2012
<http://www.dataweb.nl/~cool>

Abstract

De "boekbespreking" in Euclides door Jeroen Spandaw van "Conquest of the Plane" is geen echte bespreking maar een mislukte poging van een traditioneel denkende wiskundige. Het manifesteert onbegrip voor wat een betere aanpak van het onderwijs in wiskunde kan zijn. Het illustreert weer het belang van het advies tot een parlementair onderzoek naar het onderwijs in wiskunde.

Inleiding

Als student econometrie in 1980 en leraar wiskunde sinds 1997 zag ik een aantal mogelijkheden tot verbetering van zowel wiskunde als de didactiek daarvan. Deze heb ik vastgelegd in de boeken *A Logic of Exceptions* (ALOE) (1981, 2007, 2011a), besproken door Richard Gill (2008), *Elegance with Substance* (EWS) (2009), besproken door Ger Limpens (2010), en *Conquest of the Plane* (COTP) (2011b), besproken door Gamboa (2011). Beide laatste boeken zijn weer besproken door Gill (2012). Voor lerarenopleiders wiskunde is er ook Colignatus (2012c). Een internet pagina met verzamelde links is Colignatus (2011d).

Een samenvattend overzicht staat in Colignatus (2011c) en (2012a). Deze voorstellen vormen allemaal nog maar theorie en derhalve is er een petitie aan de Tweede Kamer voor nader empirisch onderzoek, zie Colignatus (2012b).

Nu is er een "bespreking" van COTP door Spandaw (2012). Spandaw is lerarenopleider wiskunde aan de TU Delft en heeft de dubbele doctorstitel uit Duitsland (habilitation). Hij is geen empirisch wetenschapper zoals men graag zou zien voor leraren wiskunde ook al heeft hij contact met ingenieurs. Denkelijk is het nuttig voor mijn eigen biografie op te merken dat wij studenten econometrie destijds in Groningen de colleges analyse en voortgezette analyse volgden samen met de studenten wis-, natuur- en sterrekunde.

Een probleem met Spandaw's "boekbespreking" is dat het geen echte bespreking is. Een recensie toont de bedoelingen van het boek. Spandaw legt ons echter nog eens uit hoe we traditioneel tegen wiskunde en het onderwijs aankijken. Op deze wijze staat de vooruitgang stil. Vervolgens verandert zijn tekst in een soort tribunaal of inquisitie op basis van deze traditie. Spandaw stelt dat COTP niet exact is zoals van wiskunde wordt verlangd. Deze stelling hangt in de lucht zolang hij niet laat zien wat ik doe. Dan moet de lezer maar vertrouwen op de autoriteit van de boekbespreker. Dat is natuurlijk weer lastig wanneer mijn analyse juist laat zien dat de traditie steekjes laat vallen.

Vooralsnog is er slechts één persoon in de wereld die vierkant achter ALOE, EWS en COTP staat, en dat is ondergetekende, met het voorstel dat het nu eens empirisch wordt uitgezocht. Mijn suggestie blijft dat anderen gaan lezen en nadenken en de inzichten een kans geven. Niet alleen wiskundigen maar ook in de andere vakgebieden zoals natuurkunde, economie, biologie en dergelijke. Voor hen, ouders en de Tweede Kamer is deze "boekbespreking" een extra gegeven t.a.v. de geslotenheid van denken en de kokervisie onder wiskundigen t.a.v. voorstellen tot verbetering van het onderwijs.

Pijnlijk is dat de redactie van Euclides geen gelegenheid bood om de "bespreking" vooraf in concept van commentaar te voorzien. Fouten en misverstanden hadden in dat voorstadium voorkomen kunnen worden. Niet uit te sluiten is dat Spandaw zelfs van oordeel had kunenn veranderen. Men zou kunnen stellen dat COTP zelf zo goed moet zijn dat lezers als Spandaw door lezing overtuigd raken. Helaas, COTP is een juweel maar er is meer nodig om een

traditioneel wiskundige te leren met een open geest te lezen. Dat blijkt maar weer eens. Nu is deze “bespreking” echter afgedrukt, kan zijn eigen leven gaan leiden, en het zal minder waarschijnlijk zijn dat Spandaw ook een publicatie laat afdrukken onder de titel “Excuses, ik was kortzichtig en veel te snel van oordeel”. Het is oncollegiaal en onprofessioneel en ook intermenselijk ongepast om geen hoor en wederhoor toe te passen, hoezeer redacties zichzelf ook aanpraten dat het redactiebeleid is. Het veronachtzaamt het harde werken van ondergetekende en de zorg voor de leerling, het beschimpt zijn positie in de maatschappij, het schept een klimaat van kleingeestigheid waarin mensen maar moeilijk tot voorstellen tot verbetering zullen komen. Het is extra pijnlijk omdat dit al eerder gebeurde bij Limpens (2010) van het CITO, die ook lasterlijke termen als “zonderling” en “Don Quijote” gebruikt, waar vooraf geen inzage werd verleend en waar hij en de redactie achteraf niet wilden corrigeren. Er is een groot probleem in de wereld van het onderwijs in wiskunde. Het zijn dames en heren die fris uit de ogen kijken maar hun geesten zijn vol baarden en boerka's met het kromzwaard en de stenen klaar om vermeende zondaars te verdelgen. Andermaal adviseer ik de bedrijfskolom van het onderwijs in wiskunde onder curatele te stellen. Eerder adviseerde ik tot ontslag van de hoogleraren economie en dat ik zulk advies nog niet geef voor de hoogleraren wiskunde komt slechts door de lofwaardige opstelling van zowel Richard Gill als mijn eigen vroegere lerarenopleider.

Misschien mag ik een amateur-psychologische opmerking maken. Een van de redenen waarom ik ervoor pleit in het onderwijs in wiskunde extra voorzichtig te zijn is dat wiskunde direct raakt aan het self-image en gevoelens van eigenwaarde. Een leerling die een fout maakt bij $1 + 1$ en dan een dikke onvoldoende krijgt voelt zich dieper in de ziel aangetast dan bij een fout over de zwaartekracht of de wisselkoers van de euro. Leerlingen zijn hier kwetsbaar, reden waarom ik ook stel dat leerlingen met de huidige wiskunde gemarteld worden. Denkkelijk bestaat zo'n effect ook bij wiskundigen zelf, zoals Limpens (2010) en nu Spandaw (2012). De kritiek op de wiskunde en het onderwijs in wiskunde wordt betrokken op het self-image, de angst voor de collegae, en de enige verdediging zit in slecht lezen, dichtslaan, negeren, verkeerd weergeven, schelden, en andere uitingen van ernstige cognitieve dissonantie. Voor mij, als degene die die kritiek formuleert, is er een extra verantwoordelijkheid om adequaat om te gaan met zulk gedrag. Ik doe mijn best. De belangrijkste regel is dat ik alles netjes en helder uitleg. Het advies tot een parlementair onderzoek maakt daar deel van uit. Wiskundigen doen er verstandig aan om dit advies te ondersteunen. Iemand met een ernstige ziekte onder leden moet niet zichzelf gaan opereren. Maar dat is geen vrijbrief voor de wiskundigen om mijn werk nu te negeren. Men moet natuurlijk zijn best doen om zover te gaan als mogelijk is. Amputatie, zoals opheffen van het Freudenthal Instituut, kan natuurlijk altijd.

Spandaw kwalificeert mij als een “kleurrijk persoon” die “ongezouten meningen” geeft. Ik begrijp niet waar deze kwalificatie voor nodig is. Is “ongezouten” ook “zoutloos” of heeft een mening van nature al “zout”, en wat betekent dat dan? Geeft mijn website alleen maar “meningen” en geen wetenschappelijke resultaten? Of is iedere wetenschap waarover je niet kunt oordelen toch alleen maar een “mening”? Vervolgens concludeert hij tot de “verwarde wereld van Colignatus” en breekt de staf over de “Colignatussen” van Nederland”. Vermoedelijk is de inleiding over mijn “kleurrijke” persoon bedoeld om mij na de ontmaskering als “pseudo-wiskundige” nog dieper in het ravijn te storten, zo werkt dat meestal met demagogie. Ik moet Spandaw teleurstellen. Ik ben een fatsoenlijk en degelijk wetenschapper, en ik onderbouw mijn onderzoek zorgvuldig. Het enige warhoofd in Spandaw's “bespreking” is Spandaw zelf die goede wiskunde niet herkent en klaarblijkelijk niet weet wat empirie is. En hij is onbeschoft – er is geen ander woord voor.

De afgeleide

In die andere bespreking van COTP geeft Richard Gill (2012) kort weer hoe ik de afgeleide aanpak en hij plaatst dit in een historisch kader. Spandaw reproduceert het niet. Hij construeert een eigen interpretatie, fout, en lezers krijgen dus een verwrongen beeld. Gill vermeldt ook dat de PDF op de website staat. Spandaw noemt dit niet, gebruikt de PDF ook niet om nieuwe definities terug te zoeken die hij kwijt is. Hij verwijst, in een schijntegenstelling, naar een zgn. rendabeler Spivak die echter weer traditioneel is en alleen achter de tariefmuren van Amazon.com staat.

Spandaw stelt: "Natuurlijk kun je een limietloze, puur algebraïsche theorie maken van afgeleiden van eenvoudige functies zoals polynomen. (...) Zulke theorieën zijn dan ook al lang ontwikkeld (zie bijvoorbeeld het lemma 'Derivation' op Wikipedia." (p170) Dat is volstrekt onwaar. De algebraïsche aanpak van de afgeleide (COTP) kun je niet gelijkstellen aan het ontwikkelen van een algebra die ook van toepassing is op de afgeleide ('Derivation'). De aanpak van COTP staat niet in wikipedia. Wat COTP doet is wel degelijk een originele en nieuwe formulering - totdat historisch onderzoek laat zien dat iemand anders al eens eerder is ondergesneeuwd.

Vervolgens stelt Spandaw dat COTP bij de afgeleiden van de goniometrische functies impliciet nog steeds op limieten berust, maar dat is onjuist, want COTP legt uit dat hier logica wordt gebruikt. Spandaw laat niet zien dat dit gebruik van logica onhoudbaar is. Als je wilt kun je overal limieten in hangen, ook met lichtjes in de kerstboom, maar dat is geen argument dat ze nodig zijn wanneer ook logica volstaat.

Spandaw wenst als traditionalist overal numerieke continuïteit te zien. Ik acht dat dubieus want Weierstraß bijvoorbeeld maakt gebruik van epsilon en delta die al continuïteit vooronderstellen zodat Baron von Münchhausen zich aan zijn eigen haren uit het moeras trekt. De algebraïsche aanpak van COTP steunt op de formele continuïteit die al uitgedrukt is in de te differentiëren formule. Voor school is het in ieder geval voldoende. COTP doet geen claim t.a.v. voortgezette analyse. Spandaw suggereert dat ik mij niet bewust zou zijn omtrent vragen van continuïteit maar houdt er geen rekening mee dat het onderwerp hier niet hoeft.

COTP introduceert het getal e met het didactisch voorbeeld van Brouwer's fixed point. Het is slechts een didactisch opstapje, met als pluspunt dat de dekpuntstelling genoemd wordt. Het lijkt me een elegante introductie die meteen de essentie weergeeft: de afgeleide van $\text{Exp}[x]$ is weer $\text{Exp}[x]$. Er wordt geen poging gedaan om een functieruimte te bouwen, Brouwer's stelling te bewijzen of wat ook, en er wordt gezegd dat we dit niet doen, en dat het alleen een didactisch opstapje is. Spandaw verlangt echter dat het helemaal uitgewerkt wordt. Ik acht dat een dubieus verlangen want wellicht hebben eerst $\text{Exp}[x]$ nodig voordat we dat kunnen doen. Het is slechts een didactisch opstapje, en dat wordt ook letterlijk zo uitgelegd. Vervolgens meent Spandaw dat er een betere didactische introductie is. Fijn, er zijn diverse leerboeken wiskunde die verschillende wijzen van introductie hebben die de auteurs van die boeken ongetwijfeld allemaal didactisch beter vinden. Echter, mijn visie is dat we niet zomaar kunnen zeggen wat echt beter is zonder dat we naar de empirie kijken wat leerlingen echt snel oppakken en wat langer blijft hangen. Spandaw's stelling is ex cathedra: "Je kunt eenvoudig aannemelijk maken ..." Onzin, wat je aannemelijk kunt maken is een empirische didactische kwestie en niet iets waarvan een traditioneel opgeleid wiskundige denkt dat het aannemelijk is. Vervolgens zit Spandaw in het keurslijf van de limieten terwijl COTP de stap naar de algebraïsche aanpak maakt, wat een andere didactiek dan de traditionele leerboeken kan verlangen. In de didactische aanpak van COTP wordt eerst de essentie van $\text{Exp}[x]$ gegeven en vervolgens besproken wat dit voor de algebra betekent. Spandaw ziet dit allemaal niet. Het staat er allemaal maar hij ziet het niet want hij denkt traditioneel en blijkt blind.

Spandaw:169 citeert COTP:223: "Weierstraß's limit is undefined at precisely the relevant point of interest." Spandaw noemt dit "sowieso onzin" en vraagt zich af wat dit "in 's hemelsnaam [zou] moeten betekenen?". Enkele zinnen daarboven bekennt hij echter zelf: "Dit differentiequotient laten we ongedefinieerd in $h = 0$." Precies ! Het wil er bij mij niet in dat het Engels van COTP onbegrijpelijk is. Wellicht dat Spandaw "limiet" als constructie-methode en "limietwaarde" als uitkomst aan elkaar gelijk stelt ? Niet doen. Datgene wat eigenlijk ongedefinieerd is voorziet Weierstraß met zijn limiet-constructie op kunstmatige wijze van een gedefinieerde waarde. Het is kunstmatig want wanneer je algebraïsch kijkt en simplificatie toestaat dan volgt die waarde gewoon uit de formule. Natuurlijk onderbouwt COTP dit met een gelijktijdige manipulatie van het domein. En: bij Weierstraß maak je er stiekem ook van gebruik ook al is het nu in COTP expliciet geformaliseerd.

Spandaw:169 midden derde kolom. Infinitesimalen zijn niet nul en dit is niet alleen een probleem wanneer de hoofdterm nul is. Maar in algebra kan $h = 0$ gekozen worden. Waarom wordt dit niet uitgelegd, en wordt een oude koe t.a.v. infinitesimalen uit de sloot gehaald in

plaats van de nieuwe benadering van COTP uit het boek overschrijven? Onderaan de kolom blijkt dat Spandaw alleen maar wil laten zien dat Weierstraß's aanpak dit probleem zo mooi oplost. Ja, "oplost", wanneer je de kritiek op Weierstraß en het alternatief daarvoor niet wilt zien.

De twee kolommen op pag 169 zijn een opstapje naar de eerste kolom op pag 170 waarin Spandaw de methode van COTP verwrongen weergeeft. "Colignatus heeft de volgende 'ontdekking' gedaan", waarbij de aanhalingstekens vervolgens plausibiliteit krijgen omdat Spandaw niet mijn werkelijke ontdekking noemt maar de onbenulligheid dat bij deling een term kan wegvallen. Sukkel ontdekt dat hij een boer kan laten, zoiets. De echte ontdekking is het verschil tussen statische deling (resultaat) en dynamische deling (proces met manipulatie van het domein), met vervolgens de uitwerking naar afgeleide en integraal, inclusief herkenning van deze begrippen als algebra, met continuïteit in termen van formule. Dus een complexer geheel. Spandaw eist weer numerieke continuïteit, als criterium voor "wiskundige" juistheid. Dit is misbruik van het woord "wiskundig". Ja, het is traditioneel denken volgens Weierstraß maar algebra is ook onderdeel van de wiskunde.

Ik ben geen wiskundige en voor mij lag daar geen uitdaging in het formuleren van een andere aanpak voor de afgeleide. Wel constateerde ik dat het voor het onderwijs en voor de leerlingen lastig is om almaar " $\lim_{h \rightarrow 0}$ " erbij te schrijven en ook op het juiste moment daarmee op te houden. Het is ballast zonder extra inzicht. Ik had altijd al argwaan tegen Weierstraß's gekronkel in de predicatenlogica en gebrek aan elegantie. Bij het hertypen van ALOE in 2007 leek het logisch ook naar de paradoxen bij het delen door nul te kijken. De algebraïsche formulering van de afgeleide rolde er als een bijproduct uit. COTP presenteert het in een geïntegreerd kader. Commentaar van anderen is welkom om misverstanden weg te nemen en e.e.a. op te poetsen. Maar het lijkt me nu al een resultaat voor de mathesis.

Waarschuwing voor wiskundigen

In de boeken van Lewis Carroll zien we Alice krimpen en uitgerekt worden. Ik vond dat een mooi beeld. Mijn opstel uit (2007) waarschuwt wiskundigen dat dit ook met hen kan gebeuren wanneer zij ontdekken dat wiskunde eigenlijk giskunde is. Gödel met "Deze zin is niet bewijsbaar" trekt al een beetje aan het tapijt onder de schoenen, maar hij staat er zelf nog op, wat weinig opschiet, en ALOE doet het eindelijk goed met medenemen Gödel.

Spandaw verwijst naar dit opstel maar leert er niet van. Hij vraagt zich af: "Ben ik nou zo'n wiskundige betweter [zijn term, ik volsta met de term "wiskundige" / TC] (...) Ben ik misvormd door 'abstracte theorie' (...) ? Kent u iemand die door zijn bijdragen het wiskundige licht is gaan zien? Ik niet." (p169).

Een empirisch opgeleid persoon zou niet zo slordig met het bewijsmateriaal omgaan. Op de webpagina van ALOE staat al sinds 2007 de tekst die Gill in 2007 op zijn eigen website plaatste: "The book is giving me a lot to ponder about, and has already made me change my mind concerning several issues on which I have long held strong opinions. (To give just one example: two months ago, I would have unhesitatingly said that three-valued logic was not a fruitful idea)." Limpens (2010): "Maar zonder gekheid [waarom was die gekheid nodig? / TC], hoewel ik absoluut niet geloof in zijn verhaal en ik zijn visie absoluut niet onderschrijf, vind ik dit boek toch zeker de moeite waard." Nadat Spandaw zijn tekst zal hebben ingeleverd las ik nog op de website van BON over radialen en 360 graden: "Thomas suggereert het platte vlak als eenheid. Dat is een origineel idee waar ik echter niet voor kies."

Nadat ik vond dat $\Theta = 2\pi$ beter was ben ik gaan zoeken op het internet en vond ik Bob Palais die dat ook vond, maar een eigen symbool had gemaakt, en nu is er Vi Hart (2012) die tau gebruikt, met tau-dag op 28 juni. Dus ja, hier geen directe invloed, maar een parallelle ontwikkeling van een zinvolle didactiek. Opvallend is dat Hart net zoals ik het eigen symbool van Palais afwees. Maar tau is wat verwarrend met andere letters en cijfers. Hoofdletter theta (Theta) lijkt mooi op een cirkel, en zie COTP hoe e.e.a. verder ontwikkeld wordt dan bij Palais en Hart. Spandaw heeft gelijk dat de tabellen voor conversie wiskundig triviaal zijn, maar, ik acht ze didactisch noodzakelijk want niemand is nog aan Θ radialen (voor straal 1) en 1 UMA

(voor straal 1 / Θ) gewend. Spandaw ziet een afschrikwekkende syntax maar verwacht dan de wiskunde in formules met de programmeertaal voor subroutines.

Bedacht moge worden dat ALOE in 2007 overnieuw uitgetypt en geprogrammeerd is met latere innovaties in EWS 2009 en COTP 2011. Spandaw wil nu al acceptatie bij derden zien. Hij veronderstelt wel een hele hoge acceptatiesnelheid voor een gemeenschap van traditioneel denkende personen zoals hij. Zijn taak was juist een goede weergave van COTP te geven opdat de innovaties een kans kregen. Met de blindheid zoals bij hem is het wel erg gemakkelijk om gebrek aan respons te gebruiken als argument dat het niets voorstelt.

Conclusie: Ja, Spandaw is zo'n "wiskundige betweter" [diens eigen term / TC].

Betere wiskunde

COTP bevat betere wiskunde zodanig dat een goede wiskundige dat meteen herkent en daarvoor valt. Je kunt meteen zien dat het beter is, ook al behoudt ieder verstandig mens zoals ik een slag om de arm hoe het precies in het onderwijsprogramma zou passen en of het inderdaad ook empirisch voor de leerlingen beter is.

Bijvoorbeeld geven we de assen al standaard namen x en y , en is mijn nieuwe voorstel de punten op de eenheidskring standaard de namen X en Y te geven. Dit geeft meteen het anders geheimzinnige $X^2 + Y^2 = 1$; inclusief die afhankelijkheid van de hoek gemeten in UMA, dus functies X_{ur} en Y_{ur} (unit radius). Bij de overgang naar radialen ontstaan de functies Cos en Sin .

Voor mij zit er elegantie in die overgang van $\{x, y\}$ naar $\{X, Y\}$. Bij de leerling wordt oude kennis geactiveerd, qua namen en denken in coördinaten, de nieuwe afhankelijkheid wordt benadrukt, en de namen drukken precies uit op welke assen de afzonderlijke variabelen zijn te vinden. Evenzo zit er elegantie in 1 UMA. Vervolgens wordt in het hoofdstuk over differentiëren duidelijk dat we alleen maar Cos , Sin en radialen gebruiken omdat we zo af zijn van een proportionele factor bij de afgeleiden.

Spandaw noemt dit "wellicht nog een kwestie van smaak", wat ik gezien de term "elegantie" niet kan betwisten, maar het lijkt me ook een kwestie van empirie wat bij leerlingen goed werkt. Dan stelt Spandaw: "je bewijst leerlingen geen dienst met nieuwe notaties die verder helemaal niemand gebruikt". Hij ziet dan niet dat COTP een pleidooi is om het eens uit te zoeken. Wanneer het inderdaad werkt dan kunnen we afspreken dat die notaties standaard worden. Dus, onderzoek het, in plaats van het te begraven onder verkeerde voorstellingen van zaken en het vasthouden aan traditie alleen maar wegens de traditie.

Spandaw heeft "dagen van [zijn] leven verspild aan lezen van dat boek en schrijven van deze recensie" (p168). Dit ligt dan niet aan het boek maar aan Spandaw zelf. Wanneer alles wat je leest alleen maar door de filter van de traditionele leer gaat, dan maak je het jezelf erg moeilijk, of, makkelijk. Pijnlijk wordt het voor anderen wanneer daardoor over goede wiskunde wordt heengelezen en dit wordt voorgesteld als slechte wiskunde. In COTP wordt een vector eerst netjes weergegeven met variabele begin- en eindpunten, maar daarna wordt natuurlijk gekozen voor het standaard begin in de oorsprong. Spandaw leest daar over heen, en concludeert dat er van alles met Colignatus mis is. Tja, zo kan iedereen wel een recensie schrijven. Vervolgens verlangt hij dat ook associativiteit en distributiviteit uitgewerkt worden. Tja, vanuit de didactiek wil hij dan meteen springen naar het hoogste Van Hiele niveau, waarvan alle leraren behalve hij blijkbaar weten dat dit niet werkt. Vervolgens debiteert hij wederom zijn verwarring over notatie van formules en notatie van subroutines. Gezien de beschikbare tijd kiest COTP voor de snelle overstap van het complexe vlak naar lineaire algebra als basis voor meerdimensionaliteit. Het punt is ook hoe die overstap wordt vormgegeven, en iets minder wat je allemaal nog meer kunt met C of LA.

Conclusie

Het hoofdpunt van Spandaw is natuurlijk: "Niemand wordt wijzer van dit boek: daarvoor is de wiskunde te slecht." Boven is aangetoond dat Spandaw hier als wiskundige faalt. Pijnlijker is

dat hij als vakdidacticus en lerarenopleider weinig affiniteit met de didactiek toont. Diens "bespreking" is de zoveelste uiting van het structurele probleem in het onderwijs in wiskunde. Zie Colignatus (2012b) voor de petitie gericht aan het parlement.

Referenties

- Colignatus (2007), "Waarschuwing voor wiskundigen",
<http://www.dataweb.nl/~cool/Thomas/Nederlands/Publiek/Artikelen/WaarschuwingVoerWiskundigen.html>
- Colignatus (2009), "Elegance with Substance",
<http://www.dataweb.nl/~cool/Papers/Math/Index.html>
- Colignatus (2011a), "A Logic of Exceptions",
<http://www.dataweb.nl/~cool/Papers/ALOE/Index.html>
- Colignatus (2011b), "Conquest of the Plane",
<http://www.dataweb.nl/~cool/Papers/COTP/Index.html>
- Colignatus (2011c), "Neoclassical mathematics for the schools",
<http://www.dataweb.nl/~cool/Papers/Math/2011-09-06-NeoclassicalMathematics.pdf>
- Colignatus (2011d), "Wiskunde of waarheid",
<http://www.dataweb.nl/~cool/Papers/Drgtpe/Crisis-2007plus/2011-12-24-wiskunde.html>
- Colignatus (2012a), "Met dank aan Simon Stevin", opstel 29 januari,
<http://www.dataweb.nl/~cool/Papers/Math/2012-01-29-MetDankAanSimonStevin.pdf>
- Colignatus (2012b), <http://www.ipetitions.com/petition/tk-onderzoek-wiskundeonderwijs>
- Colignatus (2012c), "Complimenten, maar een schijnoplossing: Reactie op Windels (2011)",
<http://www.dataweb.nl/~cool/Papers/Math/2012-02-02-ColignatusMbtWindels.pdf>
- Gamboa, J.M. (2011), "Book review. Conquest of the Plane, by Thomas Colignatus",
<http://www.euro-math-soc.eu/node/2081>
- Gill, R.D. (2008), "Book review. A Logic of Exceptions: Using the Economics Pack Applications of Mathematica for Elementary Logic, by Thomas Colignatus", NAW 5/9 nr. 3 sept., <http://www.math.leidenuniv.nl/~naw/serie5/deel09/sep2008/reviewssep08.pdf>
- Gill, R.D. (2012), "Book reviews. (1) Elegance with Substance, (2) Conquest of the Plane", by Thomas Colignatus", <http://www.math.leidenuniv.nl/~gill/reviewCOTP.html>
- Hart, V. (2012), <http://www.youtube.com/watch?v=jG7vhMMXagQ>
- Limpens, G. (2010), "Review of "Elegance with Substance": Euclides, 86 / 3, p130-131",
<http://www.dataweb.nl/~cool/Papers/Math/2010-12-Euclides-86-3-p130-131-a.jpg>
- Spandaw, J. (2012), "Boekbespreking: Conquest of the Plane", Euclides 87-4, p168-170
<http://www.dataweb.nl/~cool/Papers/Math/2012-02-Euclides-87-4-p168-170.pdf>