Redesign and Re-engineering of Mathematics Education

NVvW Jaarvergadering / Studiedag 2016
Workshop C6. Herontwerp Onderwijs in Wiskunde (HOW)
14:30 – 15:30, room A1.38

Thomas Colignatus
November 2 2016

Contents of the sheets for the presentation

Summary workshop C6. Herontwerp Onderwijs in Wiskunde (HOW)

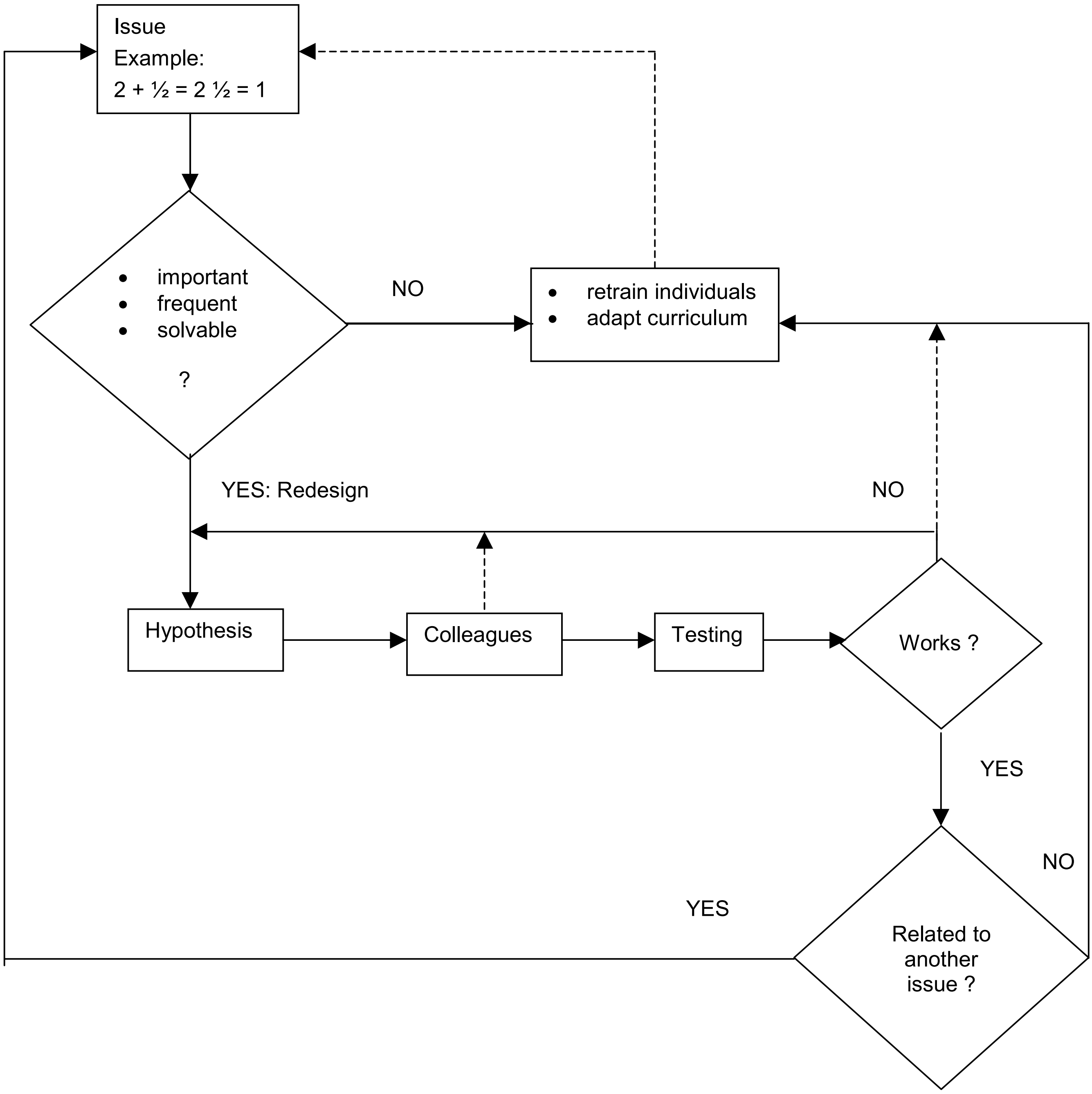
De workshop richt zich op kennismaking van belangstellenden, met bespreking van bedoelingen en mogelijkheden (bijv. werkgroepjes per provinciehoofdstad). Het gaat om vernieuwende didactieken om bij leerlingen tot betere kennis, vaardigheden en attitude te komen. Er zijn minstens twee wijzen van aanpak voor vernieuwing. De eerste aanpak neemt de traditionele stof als uitgangspunt, en zoekt naar betere manieren van uitleg, werkvorm of toetsing. Dit geeft bijvoorbeeld de discussie over de "realistische" versus de "traditionele" didactiek. De tweede aanpak stelt de traditionele stof ter discussie, pleegt een herontwerp (re-engineering), en maakt dan gebruik van de ervaringen uit de eerste aanpak voor de verdere implementatie. Die tweede aanpak kan tot soms zeer verrassende inzichten leiden. Wellicht is implementatie iets van de verdere toekomst maar het maakt docenten wel alert op mogelijke hobbels en misverstanden bij leerlingen. Voorbeelden staan in Colignatus, "Elegance with Substance" (2009, 2015), pdf staat online.

PM. Denk aan een omschrijving zoals P.G.J. Vredenduin gaf: "Bij het werken in de nomenclatuurcommissie zijn we gestuit op het volgende probleem (...). Het probleem bleek van meer principiële aard te zijn dan op het eerste gezicht leek. Reden waarom de nomenclatuurcommissie meende, dat het niet meer tot haar taak behoorde er dieper op in te gaan. Een nadere analyse ervan is echter stellig de moeite waard." Euclides jaargang 51 No 10, p 395 (1975-1976) https://archief.vakbladeuclides.nl/bestanden/51_1975-76_10.pdf

1. Workshop timeline

Topic	*Minutes*
General introduction: *business as usual* (BAU) versus *redesign* (re-engineering)	2
Example case of 2½ and flow chart	3
Thinking pause for participants: What do you think about 2½ ?	3
Collecting these thoughts, and brief discussion	5
Lecture with sheets	10
Discussion of given and perhaps also own examples	15
Discussion on prospects for the approach itself	10
Total (with slack till 60 minutes)	48

2. Flow chart


Issue
Example:
2 + ½ = 2 ½ = 1
important
frequent
solvable
?
NO
retrain individuals
adapt curriculum
YES: Redesign
NO
Hypothesis
Colleagues
Testing
Works ?
YES
NO
YES
Related to another issue ?

3. Van Hiele 1973: abolition of fractions ?

Instead of 1 / *x* use x^{-1} ?

Pierre van Hiele (1973), "Begrip en inzicht", Muusses, p196.

22 Zouden we het rekenen met breuken misschien kunnen afschaffen?

DE LEERLINGEN VINDEN HET REKENEN MET BREUKEN MOEILIJK

Iedereen weet, dat het met het rekenen met breuken in het basisonderwijs niet erg goed gaat. Het optellen van ongelijknamige breuken kost veel moeite. Het vermenigvuldigen en delen van breuken wordt als een kunstje geleerd en het is verbijsterend, hoe snel de kunstjes weer vergeten worden. In het voortgezet onderwijs komen de breuken weer terug; soms als herhaling, soms met letters in de teller en de noemer. Het rekenen met breuken wordt dikwijls naar de tweede klas verschoven, omdat in de brugklas het sukses gering is.

WAT IS HET PRAKTISCHE NUT VAN HET KUNNEN REKENEN MET BREUKEN?

We behoeven ons er niet over te verwonderen, dat de leerlingen op de basisschool het rekenen met breuken zo spoedig vergeten. Wat zijn immers voor hen de aanknopingspunten met de praktijk? De tiendelige breuken

4. Negative numbers

(1) Subtraction and positional (place value) system: if students learn to work with negative numbers sooner, then subtraction would become easier.

American / Dutch [1]	Partial difference [2]	New proposal: direct
6 15 $\cancel{7}\cancel{5}3$ -491 262	753 -491 + 3 0 0 - 4 0 + 2 2 6 2	753 491 ----- minus 3[-4]2 2[10-4]2 262

PM. In circles of "realistic mathematics education" (RME), the American method is called "functional" and the "partial difference method" is called "realistic". [3]

(2) History: 0 – *x* = -*x*. Operation *minus*. Sign negative number ("Min 1"). A student might be confused between subtraction *as opposed to addition*, and the *multiplication* by –1.

Problem that may require more didactic attention. [4]

$$9 - (-x) = ...$$

Perhaps rewrite:

$$9 + (-1)\ (-1)\ x = ...$$

Solution: *H* = -1 ("eta") $\quad 9 + H\ H\ x = ...$

Rules can also be used for more formal algebra: 10 – 4 = (6 + 4) + H 4 = 6 + (4 + H 4) = 6.

$$H = -1$$

$$x + H\ x = 0$$

$$H\ H\ x = x$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Subtraction#American_method
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Subtraction#Partial_differences
[3] https://nl.wikipedia.org/wiki/Realistisch_rekenen
[4] https://nrich.maths.org/5947

5. Surprising combination of redesigning fractions and negative numbers

Choice: is division a binary operation $y\ /\ x$ or a singular inverse $y * (1 / x)$

Problem for students: $1 / (1 / x)$

(1) De wiskundige betekenis van inverse x^H is dat: $x\ x^H = 1$ (voor $x \neq 0$).

(2) Voor machtsverheffen geldt $x = (x^H)^H$.

(3) Op de rekenmachine is een numerieke benadering (x)^(-1).

(4) Het is niet bezwaarlijk om iets als 2 3^*H* (of "2 per 3") een getal te noemen, maar je zou ook kunnen afspreken om de term "getalwaarde" te gebruiken voor de decimale ontwikkeling 0,6666..... Bij breuken is het altijd lastig om te wisselen tussen bewerking en getal (Gray & Tall, "procept"). Cruciaal blijft dat sommige breuken niet verder te vereenvoudigen zijn.

Omdat menigeen niet aan tussenstappen is gewend, schrijven we alle kleine stapjes uit. Bij gewenning kunnen grotere stappen genomen worden.

$(2 + 2^H)\ \ (3 + 3^H)^H$	Maak dit zo eenvoudig mogelijk
$(2\ \ (2\ 2^H) + 2^H)\ \ (3\ (3\ 3^H) + 3^H)^H$	Gebruik $x\ x^H = 1$
$(4\ 2^H + 2^H)\ \ (9\ 3^H + 3^H)^H$	Uitvermenigvuldigen
$(4 + 1)\ 2^H\ \ \ ((9 + 1)\ 3^H)^H$	Breuken buiten haakjes halen
$5\ 2^H\ \ 10^H\ \ 3$	Gewichten optellen
$5\ 2^H\ \ (5\ 2)^H\ \ 3$	Ontbinden in factoren (priemgetallen !)
$5\ 5^H\ \ 2^H\ \ 2^H\ \ 3$	Gebruik $x\ x^H = 1$
$3\ 4^H$	3 per 4

Ter vergelijking is er de kromme manier van de traditionele "wiskunde". Ook de klassieke deling y / x noodzaakt extra stappen. De notatie is bepalend en niet wat je aan het doen bent.

2½ / 3⅓	Gevaarlijke notatie
(2 + ½) / (3 + ⅓)	Maak er wiskunde van, anders werkt het niet
(2 (2 ½) + ½) / (3 (3 ⅓) + ⅓)	Gebruik $x / x = 1$ (schrijfwijze schept probleem)
(4 ½ + ½) / (9 ⅓ + ⅓)	Uitvermenigvuldigen
(4 / 2 + ½) / (9 / 3 + ⅓)	Gelijke noemers gemaakt
(5 / 2) / (10 / 3)	Gewichten optellen (5 / 2: getal of bewerking ?)
(5 / 2) (3 / 10)	Delen door breuk is maal omgekeerde
(5 3) / (2 10)	Uitvermenigvuldigen
3 / (2 2)	Ontbinden en wegdelen van gelijke factoren
3 / 4	drie-vierde (misbruik van rangwoord "vierde")

6. Old versus new; "realistic", "traditional" and neoclassic

Onderwijs	*Wiskunde (empirici, ingenieurs)*	*"Wiskunde" (wiskundigen)*
Nieuw	Neoklassiek: $2 + 2^H$	"21st century skills" (vooral oude wijn)
Oud	Klassiek: 2 + ½	Traditioneel: 2½ "Realistische wiskunde": verdoezelen

Onderwijs	*Wiskunde (empirici, ingenieurs)*	*"Wiskunde" (wiskundigen)*
Nieuw	Θ = Archi = 2π *naast* π = Θ 2^H {*X*, *Y*} = {Xur[α], Yur[α]} = {Cos[Θ α], Sin[Θ α]} Draai-cirkel (omtrek = 1) en draai-schijf (oppervlak = 1)	"21st century skills" (vooral oude wijn) τ = tau = 2π *ter vervanging van* π
Oud	π *maar met meer aandacht voor bronnen van verwarring*	π *en* SosCasToa *als ezelsbrug* "Realistische wiskunde": ook zo

E.e.a. al genoemd in Joop van Dormolen, "Didactiek van de wiskunde", 2e herziene druk, p207:

Joop van Dormolen "Geen graden maar ook geen radialen", Euclides,
https://archief.vakbladeuclides.nl/bestanden/42_1966-67_08.pdf

Joop van Dormolen, "De familie der cos-achtigen", Euclides,
https://archief.vakbladeuclides.nl/bestanden/47_1971-72_01.pdf

Onderwijs	*Wiskunde (empirici, ingenieurs)*	*"Wiskunde" (wiskundigen)*
Nieuw	Neoklassiek: $2 + 2^H$ Θ = Archi = 2π *naast* π = Θ 2^H {*X*, *Y*} = {Xur[α], Yur[α]} = {Cos[Θ α], Sin[Θ α]} Draai-cirkel (omtrek = 1) en draai-schijf (oppervlak = 1)	"21st century skills" (vooral oude wijn) τ = tau = 2π *ter vervanging van* π
Oud	Klassiek: 2 + ½ π *maar met meer aandacht voor bronnen van verwarring*	Traditioneel: 2½ π *en* SosCasToa *als ezelsbrug* "Realistische wiskunde": verdoezelen

7. New surprise: dynamic division (and use of brackets)

- Let y / x be as it is used currently in textbooks
- Let $y // x = (y\, x^D)$ be the following process or program, called *dynamic division*:

  $y // x \equiv$ { y / x, unless x is a variable and then: assume $x \neq 0$, simplify the expression y / x, declare the result valid also for the domain extension $x = 0$ }.

Simplification only applies when the denominator is a variable but not for numbers.

Thus $x // x = 1$ but 4 // 0 generates 4 / 0 which is undefined.

Also x / x is standardly undefined for $x = 0$.

This definition assumes a different handling of different parts of the domain. The test on the denominator is a syntactic test. When the denominator is an expression like (p + 2) then the syntactic test shows that the denominator is a variable, $x = p + 2$. One does not substitute "(p + 2) is a variable" for this doesn't look at syntax but uses the value of the variable.

It has been an option in the {...} definition above to write "(a) variable" instead of "a variable", which allows a shift from the syntactic test towards the semantic test of variability, and which also allows *substitution* into the definition, like "(p + 2) is (a) variable". After ample consideration, already in 2007 and later explicitly in Colignatus (2014b), I think that we are better served with the syntactic test on the denominator, since this directly leads to the question: what is the domain of the denominator ?

The use of the curly brackets {...} also borrows from *Mathematica.* The brackets signify a list, that can be a set, but when the elements are expressions then the sequential evaluation of those turns into a programme.

This new definition causes a closer look at the use of variables and expressions in school mathematics. The above refers to a domain, but, the domain would not be just numbers, since it also concerns expressions that can be simplified. Apparently this is already a complex issue in research mathematics. In school mathematics, students already learn about algebraic simplification, but when we focus on it here then it is reasonable to ask for explicit definitions.

PM. What students understand about algebraic simplification is not well defined, since students differ. For practical discussion we may take the computer algebra package *Mathematica* and refer to the operation Simplify[y / x]. This is not intended as a sufficient mathematical definition, but it gives a well-defined framework for discussion.

An algebraic approach to the derivative (2016)
http://thomascool.eu/Papers/Math/2016-08-14-An%20algebraic-approach-to-the-derivative.pdf

8. Discussion on prospects for the approach itself

(1) Interested ?

(2) If there were own examples: how will one deal with those ?

(3) International dimension and curricula

(4) Publications are not enough (8 years of own experience since 2008). A separate journal might help but beware of overspecialisation

(5) Role of other NVvW working groups

(6) What would be a best approach for organising this ?
If one would report to the NVvW board what would this be ?