

Meta-opmerkingen over psychologie, wiskunde en onderwijs in wiskunde

Thomas Colignatus
<http://thomascool.eu>
17 & 31 januari 2016

Samenvatting

Psychologie, wiskunde en onderwijs in wiskunde zijn innig met elkaar verbonden. Denken gaat via abstracties. Wiskunde kijkt op abstracte wijze naar patronen. Didactiek let op begrip en motivatie. Van Hiele niveau's van inzicht zijn epistemologisch en cognitief belangrijk, maar denkelijk onbekend bij psychologen. De chaos rond de rekentoets toont een falend toetsingskader. Psychometristen die toetsen op wiskunde behoren kennis te hebben van didactiek van wiskunde. Forum Theorie van A.D. de Groot verdient veel meer aandacht.

Summary

Title: Meta-remarks on psychology, mathematics and education in mathematics

Psychology, mathematics and education in mathematics are closely intertwined. Psychology deals with thought and emotion. Thought is by abstraction. Mathematics looks at patterns via abstraction. Didactics looks at insight and motivation. Van Hiele levels of insight are relevant for both epistemology and cognition, but are likely unknown to psychologists. Given deteriorating performance in arithmetic education, the Dutch government has introduced mandatory tests. Those leave much to be desired. Psychometricians who perform tests on mathematics should be qualified for didactics in mathematics. There are various breaches w.r.t. integrity in science and experimenting on children without proper protocol. The way towards improvement is via Forum Theory developed by psychologist A.D. de Groot (1914-2006).

Samenvatting	1
Summary	1
Inleiding	2
Wiskunde versus "wiskunde"	3
Sektarisch gedrag t.a.v. het onderwijs in wiskunde	4
Epistemologie en Van Hiele niveau's van inzicht	4
Methodologie en Forum Theorie	6
Psychometrie	6
Integriteit van wetenschap en ethiek van het experimenteren op kinderen	9
Conclusies	11
Literatuur	12

Inleiding

We kijken hier naar de relatie tussen enerzijds het vak psychologie - en met name cognitieve en onderwijs-psychologie, methodologie en psychometrie, met als sleutelfiguur A.D. de Groot (1914-2006), grondlegger voor CITO-meting van onderwijsresultaten - en anderzijds wiskunde en onderwijs in wiskunde. Het gekozen meta-niveau geldt niet de begrippen maar is bedoeld zoals in institutionele economie. De Groot & Visser (2003) presenteren een theorie van *wetenschap als forum*. Tussen Forum Theorie en de theorie van het toetsen bestaat een parallel. Een toets zegt niet alleen iets over de getoetste maar de getoetste zegt ook iets over de toets. Een institutioneel toetsingskader zegt iets over achterliggende wetenschap en de kwaliteit van het forum, in dit geval ook het forum van het vak psychologie. Het advies in dit artikel is dit forum veel en veel beter te laten functioneren.

De aanleiding tot dit artikel is het onderwijs in wiskunde, met als indicator de rekentoets. Het ruime kader voor de toekomst is dat de overheid het onderwijs lijkt te willen richten op "vaardigheden voor de 21e eeuw", met aandacht voor de "zachtere" intermenselijke aspecten. Relevant is hier de kritiek genoemd door Koolstra (2015b) en Colignatus (2015d). Klagen over verslechterend onderwijs is van alle tijden, zie Rietdijk-Helmer (red.) (2005). Voor wiskunde en rekenen kwam er enige empirische bevestiging in CITO-resultaten. Hierbij was ook interpretatie van uitkomsten nodig, zie Van de Craats (2007) en Bosman et al. (2009) (d.w.z. het geheel daaraan gewijde mei-nummer 2009 van Tijdschrift voor Orthopedagogiek). Inmiddels heeft de overheid rekentoetsen in het secundair onderwijs ingevoerd. Verbetering lukt maar slecht, met name in het vmbo, zie Koolstra (2015a). Kernpunten zijn: (i) Als reeds goed in het primair onderwijs geleerd zou zijn, is de rekentoets, bedoeld als toets voor het op peil houden, als met een kanon schieten op een mug. (ii) Rekenen moet je in het primair onderwijs leren, zodat de aandacht voor het secundair onderwijs en mindere aandacht voor het primair onderwijs bizar is. Colignatus (2015b) formuleert een nette aanpak om hier orde op zaken te stellen. Dringt die analyse wel door tot onderzoekers, CITO, Onderwijsinspectie en minister ?

Bij dit alles blijkt het vak psychologie een rol te spelen. Dit artikel kijkt naar drie punten. (1) Psychologie, wiskunde en onderwijs in wiskunde zijn innig met elkaar verbonden. Psychologie kijkt naar denken en emotie. Denken gaat via abstracties. Wiskunde kijkt op abstracte wijze naar patronen. Er bestaan meer patronen dan alleen getal en ruimte, zie bijv. het voorstel tot projectonderwijs Colignatus (2012a) omtrent wiskunde, religie en abstracte noties als "ziel" (vgl. "zielkunde"). Didactiek let op begrip en motivatie. Het is denkbaar dat psychologen nog weinig weten van de theorie van niveau's van inzicht, ontwikkeld door Pierre van Hiele (1909-2010). (2) Er is een rol voor de psycholoog A.D. de Groot (1914-2006), met diens methodologie en Forum Theorie. (3) Er is psychometrie (bij CITO): waar Borsboom (2006) ruimte of een kloof ziet tussen psychologie en psychometrie, doet Hickendorff (2011:xv) een poging tot integratie t.a.v. het rekenonderwijs.

Voor de bespreking volgen we een ietwat andere indeling: (1) het verschil tussen wiskunde en "wiskunde", (2) sektarisch gedrag, (3) Van Hiele niveau's van inzicht en een algemene kennistheorie, (4) methodologie en Forum Theorie, (5) psychometrie, (6) integriteit van wetenschap en ethiek van het experimenteren op kinderen.

De opmerkingen hier geven slechts een overzicht van enkele ervaringen en inzichten, en verwijzen naar langere besprekingen elders. Ik ben econometrist (Groningen 1982) en leraar wiskunde (Leiden 2008), en in dit artikel kijk ik naar het vak psychologie vanuit zowel methodologie als institutionele economie als didactiek van wiskunde. Zie als basis de boeken Colignatus (2009, 2015) en (2015a). Mijn kennis van het vak psychologie is zeer beperkt. Cool (1996) verwijst naar Aronson (1992). In Colignatus (2001, 2014) komt ook Item Response Theory (IRT) aan de orde.

NB. Na het schrijven van dit artikel is een aanvulling gemaakt in Colignatus (2016), met de titel "Psychometristen studeren onvoldoende op didactiek van wiskunde en maken rekentoetsen die ze niet begrijpen".

Wiskunde versus "wiskunde"

Men raakt in deze discussie snel verdwaald wanneer men het hier bedoeld onderscheid tussen wiskunde en "wiskunde" niet kent. Wiskundigen hebben een intolerantie ontwikkeld tegen pseudo-wiskunde en "crackpots", maar dat wordt hier niet bedoeld. Schoolwiskunde verschilt ook van wiskunde in de vakbladen, maar dat wordt ook niet bedoeld. Het gaat er hier om dat veel schoolwiskunde eigenlijk ook maar "wiskunde" is terwijl wiskundigen en leraren wiskunde dat niet zien omdat ze er zelf in opgegroeid zijn. Leerlingen worden hier gekweld en de oorzaak ligt bij die "wiskunde" en niet bij incompetentie van leerlingen. De tekst Colignatus (2015c) is gezonden naar de Tweede Kamer en Onderwijs 2032, en zal ook voor psychologen informatief zijn. Een voorbeeld is de notatie van "twee en een half":

- De traditionele notatie is $2\frac{1}{2}$, en dit is "wiskunde" en geen wiskunde. Het leest als "twee maal een half" zoals $2a$ of $2\sqrt{2}$. De uitspraak en bedoelde betekenis van "en" wordt geschreven als "maal". In gedrukte vorm is de uitzondering te leren maar in handschrift (van leerlingen) is het rampzalig want met een (variabele) spatie krijgen we $2 \frac{1}{2} = 1$. Dit besef is nog onvoldoende doorgedrongen. Het *Center for Improving Learning of Fractions* (CILF) - met bekende auteurs Jordan, Fuchs en Siegler - toont hoe belangrijk het leren van breuken is: maar noemt bij mijn weten noch dit manco noch de oplossingsaanpak: <https://sites.google.com/a/udel.edu/fractions>.
- Een juiste (klassieke) notatie houdt schrift consistent met uitspraak: $2 + \frac{1}{2}$.
- Didactisch beter (neoklassiek) is de notatie $2 + 2^H = 2 + 2^H$ voor $H = -1$. Op zich zou het exponent -1 volstaan maar leerlingen kunnen ten onrechte denken dat ze dan een bewerking moeten doen. De uitspraak van x^H is "per x ", wat aangeeft dat hier inderdaad een eigen algebraïsch symbool H wenselijk is (vergelijk $i = \sqrt{H}$).

Het voorstel om het exponent te gebruiken is van Van Hiele (1973). Het voorstel voor de H is van mij met verwijzing naar Peter Harremoës, zie Colignatus (2015a). Dit voorbeeld is nog eens weergegeven in Tabel 1. Dit is slechts een voorbeeld, en het structurele probleem wordt besproken in de boeken Colignatus (2009, 2015) en (2015a), zoals gezegd de basis voor deze analyse en dit artikel. Dat structurele probleem is: Wiskundigen zijn opgeleid tot abstract denken en niet tot empirische wetenschap. Komen zij voor de klas dan zijn daar reëel bestaande leerlingen, en zij lossen hun cognitieve dissonantie op door vast te houden aan een traditionele "wiskunde". Wanneer leerlingen de kwellingen niet aankunnen dan is het de schuld van die leerlingen zelf, en zoeken zij maar een andere opleiding.

Tabel 1. Voorbeeld van het onderscheid tussen wiskunde en "wiskunde"

	<i>Wiskunde (empirici, ingenieurs)</i>	<i>"Wiskunde" (wiskundigen)</i>
<i>Nieuw</i>	Neoklassiek: $2 + 2^H$	"21 st century skills" (oude wijn zoals "realistische wiskunde")
<i>Oud</i>	Klassiek: $2 + \frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$ (a) "Traditioneel": oefenen op vormen als $2\frac{1}{2}$ / $3\frac{2}{3}$ (b) "Realistische wiskunde": verdoezelen (Van der Plas (2009))

Met dit (hier bedoelde) onderscheid tussen wiskunde en "wiskunde" kan men zicht krijgen op de chaos in "wiskunde-onderwijs-land" waardoor dit onderwijs is kunnen ontsporen (naast allerlei maatschappelijke oorzaken voor onderwijs in het algemeen en de rekenmachine in het bijzonder). In onderwijs is er sinds de Commissie Dijsselbloem uit 2008 verschil tussen *Wat* en *Hoe*. Het parlement bepaalt *Wat* en de docenten bepalen *Hoe*. In het *Wat* is er verschil tussen wiskunde en "wiskunde". Het parlement wil wiskunde maar krijgt "wiskunde". Zal het parlement dit ooit willen onderzoeken ?

Sektarisch gedrag t.a.v. het onderwijs in wiskunde

Wanneer wiskundigen les in "wiskunde" gaan geven, hebben leerlingen daar extra moeite mee, veel meer dan bij wiskunde, en soms gaan wiskundigen dan op zoek naar "didactische oplossingen". Freudenthal (1905-1990) ontwikkelde het "realistische wiskunde onderwijs". Jan van de Craats (geb. rond 1945) reageerde daarop, eerst t.a.v. de "aansluitingsproblemen" van secundair naar tertiair onderwijs, en vervolgens met Van de Craats (2007) en later zwartboek t.a.v. het primair onderwijs. Het blijkt hier niet om verschillende "scholen" in denken te gaan, maar om sektarisch gedrag.

Het probleem hierbij is dat geen van beiden voor zulk onderwijs bevoegd is, en verantwoord empirisch onderzoek deden of doen. Freudenthal had in zijn periode te maken met "New Math", en hij kon verwijzen naar de breed gedragen gedachte dat dit niet voldeed. Hij toonde echter niet dat zijn methode werkelijk beter was. Freudenthal was wars van statistiek, met het begrijpelijke maar niet geheel terechte argument dat leerlingen zeer heterogeen zijn en dat er een veelheid aan verklarende factoren is (niet alleen aanleg maar ook leerboeken, docenten, etcetera). Van de Craats kon naar de statistieken van CITO verwijzen dat de aanpak van Freudenthal niet voldoet, maar, gaf geen empirische onderbouwing dat zijn formulering van de "traditionele" aanpak werkelijk beter is (met uitwerking van wat dan "beter" genoemd mag worden). Je kunt dit "scholen" van denken noemen, maar het onttaardt in sektarisch gedrag zoals dat men tegenargumenten negeert en niet zoekt naar onderscheidende experimenten die het verschil tonen.

Waar abstract denkende wiskundigen zoals Freudenthal cs. en Van de Craats cs. het empirisch onderzoek lieten liggen, werd dit gat gevuld door de psychometrie en CITO. Hickendorff (2011) liet zien dat de methoden van Freudenthal en Van de Craats vergelijkbare uitkomsten op CITO-basis hebben. Zij doet nog wel het advies om de "traditionele" manier te volgen, en baseert dit op zwakke leerlingen die behoefte hebben aan algoritmen die altijd werken. Hieronder kom ik op de psychometrie terug.

Ik ben geen psycholoog en kan me denkelijk veroorloven om deze stromingen van "realistische wiskunde onderwijs" en "traditioneel onderwijs" sektarisch te noemen. Beide sekten negeren de kritiek van Colignatus (2008) over het verschil tussen wiskunde en "wiskunde". Zij monopoliseren het debat met kritiek op alleen elkaar. Ros (2009) interviewt partijen en toont geen wetenschappers die op zoek zijn naar het onderscheidend experiment. Het is Milikowski (2009) (psycholoog NIP) die vraagt: "Niettemin, we zouden het kunnen onderzoeken. Zou dat niet chiquer zijn dan altijd weer die stemmingmakerij?" Hierop komt van beide sekten geen antwoord, behalve wanneer de implicatie is dat men het onderzoek van Hickendorff als zodanig moet hebben beschouwd – wat het niet werkelijk is, zie onder. Colignatus (2008) adviseert tot een parlementair onderzoek maar dit wordt door Van de Craats met een drogredenering afgewezen en daarna stelselmatig verzwegen, denkelijk ook in diens contacten met het parlement, zie Colignatus (2015k). Van de Craats is medeoprichter en inmiddels adviseur van de Stichting Goed Rekenonderwijs (SGR), met als bestuurslid o.a. onderwijs- en ontwikkelingspsycholoog Tom Braams. Het lijkt niet onredelijk Braams te beschouwen als een slachtoffer van Van de Craats. Braams met zijn adviespraktijk is veel kwetsbaarder dan een inmiddels emeritus hoogleraar wiskunde. Toch zou Braams via het "Stockholm syndroom" veel te onkritisch t.a.v. Van de Craats kunnen zijn, waar Van de Craats voorbijgaat aan kritiek en Braams zou behoren door te vragen, zie Colignatus (2015kr).

Epistemologie en Van Hiele niveau's van inzicht

In 2014 bleek dat Freudenthal ook wetenschappelijke fraude heeft gepleegd door ideeën van wiskundeleraar Pierre van Hiele (1909-2010) te gebruiken, in eigen terminologie te gieten en niet meer adequaat te verwijzen. Ook werden deze ideeën soms verworden en daardoor empirisch onpraktisch, welke "creativiteit" aan de diefstal niet afdoet. De bespreking staat in Colignatus (2015ef). Er bestaat nog geen expliciete reactie van het Freudenthal Instituut t.a.v. deze fraudeleuze basis voor dat instituut, zoals men gewend is kritiek te negeren. Voor een

weigering naar deze argumenten te kijken zie bijv. (oud-) medewerkers Van der Kooij (2015) en Doorman (2015) (welke laatste naar Freudenthal verwijst maar naar Van Hiele als de bron had moeten verwijzen).

Een gevolg van deze fraude van Freudenthal is dat het werk van Van Hiele in belangrijke mate uit het oog is verdwenen. Niet volledig, want daarvoor blijkt dit werk toch te goed. Wel zodanig dat vanuit het wetenschappelijk onderzoek naar onderwijs in wiskunde blijkbaar onvoldoende stimulans is uitgegaan naar andere terreinen zoals epistemologie en, voorzover ik begrijp, cognitieve psychologie en psychometrie.

Van Hiele (1957) presenteert een theorie over niveau's van inzicht. Waar Piaget reeds suggereerde dat zoiets bestond en afhankelijk was van leeftijd, toont Van Hiele dat dit onafhankelijk van leeftijd is, zodat het vatbaar is voor didactiek. Tevens toont Van Hiele de logische structuur die het bestaan van niveau's verklaart, en waarop de didactiek zich kan richten om niveau-overgangen te stimuleren. Hij stelt expliciet dat de theorie een algemene geldigheid heeft, en zijn keuze voor het onderwijs in meetkunde is alleen een demonstratie. Drie niveau's bestaan reeds uit: basale eigenschappen, relaties tussen eigenschappen, deductie op die relaties. Met dit alles geeft hij een fundamentele bijdrage aan de epistemologie, en, voorzover cognitieve psychologie daarmee samenhangt, ook daaraan. Zie Colignatus (2015gj). Het zou niet zo moeilijk moeten zijn om in het onderwijs in andere kennisgebieden ook zulke niveau's van inzicht terug te vinden. Niet ondenkbaar is dat allerlei psychologische inzichten ook daarmee te maken hebben.

Stellan Ohlsson (2011) stelt dat mensen (kinderen) leren van globaal naar concreet, en hij noemt dat "van abstract naar concreet". Van Hiele (1957 & 1973) erkent dat globale ervaringen het uitgangspunt zijn: hij noemt dat het basale ervaringsniveau. Hij stelt echter dat het leren gaat van concreet naar abstract. Dit is inconsistent met Ohlsson, die toch modern onderzoek presenteert. Zoals dit alles hier gesteld is, zien we een verwarring van termen. Bruikbare terminologie is dat geleerd wordt van vaag naar precies, en van concreet (getekende lijnstukken) naar abstract (in de geest voorstelde oneindige lijnen). Leerlingen hebben een voorkeur voor vage termen, want daarmee ontstaat ook een gevoel van zekerheid. Bijvoorbeeld zeggen dat een bal in de bosjes ligt is eerder *waar* dan zeggen specifiek bij welke struik. Zie Colignatus (2015h). Ohlsson moet zijn termen aanpassen.

Dit geeft ook een kernkwestie hoe Freudenthal de analyse van Van Hiele verwingt. Waar Van Hiele onderscheid maakt tussen het leren van wiskunde en het toepassen van die geleerde wiskunde, laat Freudenthal leerlingen wiskunde leren vanuit het doen van toepassingen. Dit laatste is (a) half-begrepen en (b) de omgekeerde route. Het is correct om op het laagste niveau met "contexten" te beginnen, maar alleen als opwarmertje, en niet meer dan nodig. In de psychologie zou men over "framing" spreken. De toets is echter op de wiskunde, en niet per se binnen die context. De term "context" is gekaapt door de terminologie van de "realistische wiskunde" om te verbergen dat men eigenlijk toegepaste wiskunde doet zonder eerst de wiskunde te beheersen.

Misverstanden op dit terrein kunnen grote gevolgen hebben. Een kernfout is dat velen Van Hiele bij de sekte van Freudenthal scharen, en niet zien dat Freudenthal misbruik van Van Hiele maakt, en dat Van Hiele juist bescherming behoeft. Oud-leraar wiskunde Visser (2005 ?) maakt die kernfout. In deze kwestie is psycholoog Ben Wilbrink (geb. 1944) van belang: (1) Hij maakt die kernfout. (2) Wilbrink omarmt Stellan Ohlsson, dat leren van "abstract naar concreet" zou gaan. (3) Wilbrink en Van de Craats omarmen ook elkaar. Van de Craats omarmt de lesmethode "Reken Zeker" (Noordhoff) die "van concreet naar abstract" werkt, maar Wilbrink geeft daar geen kritiek op, ook al is dit in strijd met zijn omarming van Ohlsson. Klaarblijkelijk weegt het sektarisch belang van de strijd tegen Freudenthal zwaar. Zie Colignatus (2015i) voor citaten van Wilbrink en Van de Craats. Kirschner & Wilbrink (2014) vragen kritisch "Wat toetst de rekentoets wel?" maar desgevraagd wil hoogleraar Onderwijspsychologie Kirschner niet bij Wilbrink toetsen hoe het nu zit t.a.v. deze drie punten. En dan hebben we het hier nog niet gehad over het verschil tussen wiskunde en "wiskunde".

Methodologie en Forum Theorie

T.a.v. de methodologie bevinden we ons in het veilige domein van A.D. de Groot (1961) en De Groot & Visser (2003). Van belang is aanvullend nog wel de door mij voorgestelde "definition & reality methodology", die inhoudt dat onderzoekers zodanige definities kiezen dat de verklaringskracht geoptimaliseerd wordt, zie Colignatus (2015gj). Neem als voorbeeld de "wet van behoud van energie": je kunt dit zien als een empirische theorie (en zo is het ook begonnen) maar ook als een definitie (tegenwoordig) die ons vertelt wat we als "energie" beschouwen. Wanneer het een definitie is, is die per definitie waar, en kun je alleen discussiëren of die in een situatie wel of niet nuttig is. Forum Theorie helpt begrijpen dat er gemeenschappen van onderzoekers zijn die dezelfde definities hanteren, zie Colignatus (2015gj).

T.a.v. die aandacht voor wat daadwerkelijke gebeurt verschilt Forum Theorie niet van de aanpak van Thomas Kuhn, maar Forum Theorie wil het wetenschappelijk proces optimaliseren en met name wildgroei van misplaatste theorievorming in de gamma-wetenschappen tegengaan. Smaling (2008 & 2009) stelt in antwoord dat wetenschap in de normale fase meer gediend is met dialoog en empathie dan met scherpslijperij, maar ontkent niet dat er momenten zijn waarop gekozen moet worden (2009): "De kritische discussie is soms wel nuttig en ook nodig, bijvoorbeeld wanneer beslissingen over de wetenschappelijkheid van een tekst of onderzoek moeten worden genomen in het kader van institutionele beoordeling en subsidiëring. En het debat kan best weleens prikkelen tot verscherping van inzicht, redentatie en formulering. Maar de basisvorm, het stramen van een vruchtbare en stimulerende communicatie tussen wetenschappelijk onderzoekers zou toch de kritische dialoog moeten zijn." Dit verschilt niet van de houding van iedere wetenschapper die verstandig probeert te zijn, waaronder ik ook A.D. de Groot en mijzelf reken.

Ikzelf stel een "Economisch Hof" voor als verbetering op het Centraal Planbureau (CPB), waar de overheid voor het beleid toch moet kiezen uit economisch-wetenschappelijk visies, en het CPB niet aan die eisen van Forum Theorie voldoet. Zie Colignatus (2000, 2005, 2011) voor theorie en concept grondwetsamendement, en vraag economen of zij recensies willen schrijven. We kunnen de chaos in "wiskunde-onderwijs-land" ook begrijpen uit het ontbreken van een "Simon Stevin Instituut", zie Colignatus (2015l).

Het vak psychologie heeft voor het onderhavige aldus een eerste invloed via A.D. de Groot, zie ook Colignatus (2015m). Een andere lijn van invloed loopt weer via psycholoog Wilbrink. Volgens Wilbrink zou Van Hiele's definitie van niveau's van inzicht niet falsifieerbaar zijn conform Popper, en daarmee buiten de demarcatie van wetenschap en empirie vallen. Afhankelijk van je onderzoek kun je niveau's kiezen, en dat zou volgens Wilbrink willekeurig variëren zonder algemene geldigheid. Dat is een wonderlijk verbod op definities. Het is vruchtbaarder om toe te staan dat wetenschappers optimale definities kiezen die empirisch onderzoek zo efficiënt mogelijk maken. Van Hiele's niveautheorie geeft zulke definities. In tegenstelling tot wat Wilbrink beweert geeft Van Hiele een empirisch relevante algemene theorie, en demonstreert hij dat ook. Psycholoog Wilbrink weigert hierop een antwoord te geven.

Psychometrie

Zoals gezegd liet Hickendorff (2011) zien dat de didactieken van Freudenthal en Van de Craats vergelijkbare uitkomsten op CITO-basis hebben. Maar er is een probleem met die CITO-basis. Het punt is dat de traditionele algoritmen (zoals de staartdeling) voorbereiden op algebra in de vervolgopleiding. Deel bijvoorbeeld $x^3 + 2x^2 - x - 2$ door $x - 1$. Wanneer alleen de uitkomst van een som getoetst wordt en niet de manier van oplossen, dan verdwijnt cruciale informatie t.a.v. succes of falen van een didactiek. Bij proefwerken kunnen leerlingen punten verdienen door ook tussenstappen te tonen, en is het onjuist om alleen naar de "uitkomst" te kijken. Het proefschrift geeft daarom een verkeerd beeld. Nog niet onderzocht is of leerlingen die de "realistische" methoden gebruiken ook in staat zijn tot algebra, of juist wezenlijk zijn gehandicapt voor de rest van de vervolgopleiding en het latere leven (maar dit laat zich wel logischerwijs vrezen). De discussie in Psychometrika tussen ("realistische") Van

den Heuvel-Panhuizen et al. (2009) en Hickendorff et al. (2009) is daartoe bijv. ook niet toereikend.

Het is onjuist om dit punt alleen bij Hickendorff te leggen, zie Colignatus (2015n) die ook verwijst naar promotores W.J. Heiser, C.M. van Putten en N.D. Verhelst, en leescommissie A.A. Beguin, P.A.L. de Boeck, E.H. Kroesbergen and L. Verschaffel.

Het is opmerkelijk dat het woord "algebra" niet in het proefschrift van Hickendorff (2011) voorkomt. Toch is op het punt gewezen in Bosman et al. (2009), d.w.z. het geheel daaraan gewijde mei-nummer 2009 van Tijdschrift voor Orthopedagogiek. Het proefschrift verwijst echter niet naar Milikowski, Van der Plas en Verhoef. Van der Plas (2009:210): "Om ervoor te zorgen dat wiskundeleraren in de brugklas ook daadwerkelijk kunnen beginnen met algebra, is het van belang dat de basisschool haar leerlingen goed heeft leren rekenen met hele getallen, decimale getallen en breuken." Verhoef (2009:223): "Dat heeft overigens het gevolg dat ook de algebra van het voortgezet onderwijs niet in vruchtbare aarde valt. Als je niet met getallen kunt rekenen, dan ook niet met letters (zie de bijdrage van Liesbeth van der Plas elders in dit tijdschrift)."

Het proefschrift Hickendorff (2011:233) verwijst wel naar Van de Craats (2007): "Van der Craats (2007) argued that these procedural skills are at the core of mathematics, and should therefore receive much more instruction, drill, and practice, than they receive now." Van de Craats (2007) richt zich echter op leren rekenen in het primair onderwijs, en richt zich niet op de betekenis van (algebraïsche) vaardigheden voor de vervolgopleiding. Het woord "algebra" komt in zijn artikel ook niet voor.

Mogelijk kan men het Van de Craats niet kwalijk nemen dat een artikel geschreven voor een bepaalde context nu geplaatst wordt in een context die nu ietwat anders lijkt. Men kan Van de Craats echter wel bekritisieren dat zijn gekozen context kunstmatig en didactisch onverantwoord is. Waarom meent Van de Craats dat hij rekenkunde in het primair onderwijs kan bespreken zonder naar de betekenis voor algebra te kijken? Je kunt ook denken: het ligt zo voor de hand, dat ook Hickendorff dit had moeten begrijpen. Bedenk: Van de Craats is wiskundige, en heeft geen basisopleiding in empirie en didactiek van wiskunde (zeker niet voor het primair onderwijs). Wat hij over de jaren over didactiek heeft geleerd, kan onvoldoende aangrijping hebben gekregen op die eerdere vorming tot abstract denkende wiskundige. In het abstract universum van Van de Craats volstaat het te zeggen dat de traditionele algorithmen onderwezen en geoefend moeten worden. Een empiricus zou ook schrijven: dat deze relevant zijn voor de vervolgopleiding, waarom zo, en dat daarop dan ook getoetst moet worden. Maar Van de Craats's beroepsdeformatie als wiskundige ontslaat Hickendorff cs. niet van de taak tot zelfstandig nadenken.

Leerlingen in het primair onderwijs werken al met onbekenden. Een onbekende x voor getallen 0, 1, 2, 3, ... is als het begrip *naam* voor mensen Piet, Jan, Maria, ... Leerlingen in het primair onderwijs kunnen denkelijk meer algebra aan dan nu gegeven wordt. Bovenstaande x^H zou geen probleem hoeven zijn. Zoiets is natuurlijk te toetsen. Voor onderzoek hieraan dient een wetenschappelijke omgeving d.w.z. een Simon Stevin Instituut te bestaan, waarin het sektarisch gedrag wordt tegengegaan, en in dialoog wordt gewerkt, en waarin conform Forum Theorie beslissingen voor de praktijk genomen worden.

Relevant in dit geheel is dat in 2009 ook het rapport van de commissie Lenstra KNAW (2009) verscheen, t.a.v. het rekenen in het primair onderwijs met speciale aandacht voor de didactische methoden. Het rapport negeert Colignatus (2008) en het is denkbaar dat Van de Craats hen daar niet van verteld heeft. De commissie bestond uit zeven deskundigen, waaronder psychometristen Kees van Putten en Lieven Verschaffel, terwijl Marian Hickendorff was gevraagd voor ondersteuning. Geen der deskundigen was blijkbaar bewust van het problematische karakter van gemengde breuken zoals $2\frac{1}{2}$ en van het belang van de traditionele algorithmen voor latere algebra. In uitkomsten van studies wordt een "effect score" genomen, vermoedelijk gangbaar de score waarin de uitkomst van een som goed of fout wordt gerekend, en waarbij niet gekeken wordt naar de wijze hoe het antwoord is gevonden. In een goed proefwerk wiskunde krijg je ook punten voor tussenstappen. Het kernpunt van mijn kritiek op dit KNAW rapport is dat deze problematieken niet worden

besproken, en dat de commissie-leden merendeels niet-bevoegd zijn voor ander onderwijs dan aan de universiteit. Ikzelf ben niet bevoegd voor het primair onderwijs, en houd me dus op de vlakte over hoe e.e.a. ligt, ook t.a.v. dit KNAW-rapport, maar deze twee punten van kritiek moeten genoemd worden. KNAW-commissieleden zoals wiskundigen Jan Karel Lenstra, Rob Tijdeman en Hester Bijl zijn ook niet bevoegd voor het primair onderwijs, en hadden dit rapport nooit in deze vorm mogen laten verschijnen. In Verschaffel & Torbeyns (2011) breekt de eerste uit in een lofzang over Lenstra. In een *Liber Amicorum* mag wellicht meer dan gebruikelijk, maar deze tekst pleegt geschiedvervalsing t.a.v. "goed onderbouwd, evenwichtig en behulpzaam", "waardering", "goed einde" en de deskundigheid en wetenschappelijke kwalificaties van Lenstra t.a.v. het onderwerp van onderzoek. Wanneer psychometrist Verschaffel zelf onvoldoende weet van didactiek van wiskunde dan kan men begrijpen dat hij dit ook bij Lenstra niet onderkent:

"Een moedig en belangrijk initiatief volgens de enen, een arrogante en ronduit gevaarlijke onderneming volgens anderen. Hoe dan ook, deze commissie is er gekomen, en zij heeft – onder leiding van Jan Karel Lenstra – een goed onderbouwd, evenwichtig en behulpzaam rapport uitgebracht (...) dat zowel bij de vertegenwoordiger van beide stromingen als bij de onzekere middengroep, met belangstelling en waardering is ontvangen (...). Als lid van deze commissie heeft de eerste auteur van deze bijdrage van dichtbij meegemaakt hoe de voorzitter van deze commissie, door middel van zijn rijke intellectuele en wetenschappelijke bagage, zijn strategisch inzicht, zijn uitstekende pen, en zijn grote sociale en persoonlijke vaardigheden, op een zeer kort tijdsbestek en met beperkte mankracht en middelen, deze delicate onderneming tot een goed einde wist te brengen." (p259).

Problematisch zijn echter de verslagen door voormalig hoofdredacteur van Euclides Martinus van Hoorn (2010) en (2014) omtrent zowel de presentatie van het KNAW-rapport uit 2009 als de terugblik vijf jaar later. Van Hoorn (2010:28) noemt het probleem van de invalide meting niet, noch door Jan van de Craats noch door Van Hoorn zelf:

"Opvallend was dat velen direct hun instemming met het rapport betuigden. Dat gold met name voor vier mensen die tevoren uitgenodigd waren te reageren. Jan van de Craats, eerder genoemd, prees de commissie voor haar degelijke werk. Jan van Maanen, hoogleraar-directeur van het Freudenthal Instituut te Utrecht, sprak de hoop uit dat op een breed front aan verbetering van het rekenonderwijs kon worden gewerkt. Vertegenwoordigers van de onderwijsinspectie en van de PO-raad (...) reageerden eveneens instemmend."

Van Hoorn (2014:262) schrijft: "Algebra is de natuurlijke voortzetting van het rekenen." Hij bedoelt niet dat algebra gemakkelijker wordt wanneer je alleen kunt rekenen met happen en proberen. Toch registreert hij niet dat de psychometristen in het KNAW-rapport 2009 verkeerd meten en dat de conclusies dan invalide zijn. Navraag in 2016 geeft dat Van Hoorn erkent dat het relevant is hoe e.e.a. wordt gemeten, maar geeft nog geen erkenning dat hij en Van de Craats reeds in 2009 op die invaliditeit hadden moeten wijzen. Het artikel van Van Hoorn (2014) is ook interessant omdat het nog eens noemt:

- P259-260: Dat het besluit uit 2010 tot de rekentoetsen een politiek besluit is, buiten de wens der leraren en de normale onderwijskaders om, en waarbij het opvalt dat het politiek gemakkelijker lijkt om een paar duizend leraren wiskunde meer werk te geven dan honderdduizend onderwijzers bij te scholen. Dit negeert echter het didactisch inzicht dat je rekenen moet leren in het primair onderwijs en niet in het secundair onderwijs (wanneer je ook al moet kunnen rekenen voor je algebra).
- P260: Dat de rekentoetsen een ingewikkelde manier zijn om psychometristen iets meer van de didactiek van wiskunde te leren begrijpen. "Bij een gewoon wiskunde-examen krijgt de kandidaat vier, vijf of zes verschillende situaties voorgelegd, maar geen veertig, vijftig of zestig, zoals bij de rekentoets. Het grote aantal opgaven is volgens het Cito nodig omdat je nu eenmaal veel vragen moet stellen om een betrouwbare meting te krijgen. Dat kandidaten fouten gaan maken door het stresskarakter van de toets wil er bij het Cito blijkbaar niet in." Zie ook p263 voor de ervaring van een "rekencoördinator".

- P261 en 262: Er is Roel Bosker, psycholoog, hoogleraar onderwijsevaluatie in TUT, lid van adviesraden Onderwijsinspectie, Onderwijsraad, Cito, nu directeur GION, en anno 2014 gevraagd voor een commissie om te kijken naar het gedoe rond die rekentoetsen. Ook Bosker noemt niet het probleem dat zijn "effect size" invalide is t.a.v. het onderwijskundig doel.

Volledigheidshalve verwijs ik ook naar mijn verslag van die bijeenkomst uit 2014 en brief daarover aan KNAW / LOWI, Colignatus (2014abc). Bizar is de opmerking van Korbijn aan Lenstra:

"Zoals je altijd hebt volgehouden had je geen enkel verstand van rekenonderwijs, en dat gold voor mij zeker net zo sterk. Twee voetballers in een team die allebei niet weten wat buitenspel is, moest dat nou geen sterrenteam worden?"

Het bovenstaande is niet het enige voorbeeld van falende psychometrie. Het andere mij bekende voorbeeld bestaat uit de proefschriften van Friso-Van den Bos (2014) en Xenidou-Dervou (2015) omtrent getalbegrip en de eerste fasen van het leren rekenen. Deze proefschriften gaan te gemakkelijk voorbij aan het bekende verschijnsel dat kinderen eerst leren praten voordat zij leren lezen en schrijven. De uitspraak van getallen (bijv. voor 21 Nederlands "een-en-twintig" en Engels "twenty-one") is dan van belang, zie Colignatus (2015q). Hier worden problemen in het reken-onderwijs veroorzaakt welke abstract denkende wiskundige Freudenthal met zijn "realistische wiskunde" wilde oplossen, maar die beter aangepakt kunnen worden met een wiskundig verantwoorde uitspraak van getallen, zoals ook Noorwegen in 1950 tot zo'n wijziging overging, zie Colignatus (2012b) en (2015a). De situatie toont ook dat het Freudenthal Instituut heeft begrepen dat het statistici en psychometristen moet aanstellen, maar klaarblijkelijke worden deze toch weer opgeleid tot "realistische wiskunde" en het niet ingaan op kritiek.

Bizar is het oordeel van Van den Heuvel – Panhuizen, geciteerd in het Volkskrant-artikel van Zijlmans (2004): "Een verandering in de alledaagse uitspraak van getallen is dan ook niet nodig, vindt Van den Heuvel." Men kan ook enige kritiek hebben op de kwaliteit van deze wetenschapsjournalistiek, het is weer een gemiste kans. De uitspraak van getallen is wel degelijk relevant voor begrip van getal, tellen en rekenen, en latere wiskunde zoals algebra. Problemen die daarin ontstaan probeert Van den Heuvel – Panhuizen op te lossen met "realistische wiskunde", en alternatieve oplossingen zijn blijkbaar niet welkom. De juiste aanpak is over te gaan op een wiskundig correcte uitspraak van de getallen. Het wetenschappelijk juiste antwoord is dat onderzoek wenselijk is naar consensusvorming en wijze van introductie. Een eerste stap is bijvoorbeeld ISO vastlegging van wat internationaal als zo'n uitspraak wordt gezien, zie Colignatus (2015s), zodat uitgevers en vertalers weten waaraan zij toe zijn. Noorwegen ging in 1950/51 over tot verandering van uitspraak van "een-en-twintig" naar "twenty-one" (op zijn Noors). Deze ervaring kan ge-evalueerd worden, zie bijv. ook Kristiansen (2008), waarin echter nog niet wordt gekeken naar het getalbegrip.

Integriteit van wetenschap en ethiek van het experimenteren op kinderen

Gelukkig zijn kinderen nogal weerbaar t.a.v. alle experimenten die zij over zich heen krijgen. Toch kan wat nu gebeurt t.a.v. het onderwijs in wiskunde en rekenen niet door de beugel, noch wetenschappelijk, noch t.a.v. integriteit van wetenschap, noch t.a.v. het experimenteren op mensen.

De KNAW en de *All European Academies of Science* (ALLEA) hebben een Gedragscode t.a.v. integriteit van wetenschap ontwikkeld. Deze beperkt zich tot vooral (1) manipulatie, (2) fabrikatie, (3) plagiaat. Belangrijke inbreuken blijven zo ongenoemd. Wanneer chemicus Linus Pauling zonder biomedische kwalificatie aan de gang gaat met de relatie van vitamine C en kanker, dan staat die Gedragscode dat toe. Wanneer wiskundigen zoals Freudenthal en Van de Craats zonder kwalificatie in de didactiek toch met dat laatste aan de gang gaan, dan staat die Gedragscode dat toe. Deze deficiënte aanpak bij de Gedragscode laat zich begrijpen vanuit werkgevers die hun reputatie tegen wangedrag van medewerkers willen beschermen, en die juridisch voor de rechter moeten argumenteren wanneer een wetenschapper zich niet langer kan beroepen op de vrijheid van

wetenschappelijk denken. Vaststellen of een wetenschapper zijn boekje te buiten gaat, is mogelijk juridisch een mijnenveld, bijv. waar we ook interdisciplinair denken willen bevorderen. Censuur van wetenschap door werkgevers valt ook niet onder de Gedragscode, wat zulke werkgevers soms wel zal uitkomen. Met alle begrip voor deze werkgevers is het voor de wetenschap urgenter om meer aandacht te geven aan Forum Theorie, waarin niet werkgevers en juridificatie centraal staan, maar waarin het wetenschappelijk proces met hoor- en wederhoor transparanter wordt. Zie hiervoor Colignatus (2015o). Het bleek dat de KNAW / ALLEA Gedragscode bevorderd is door (toets-) psycholoog Pieter Drenth (geb. 1935). Mede in de hoop dat Drenth belangstelling zou hebben voor het belang van Forum Theorie van diens collega A.D. de Groot, heb ik Drenth gevraagd om een reactie op Colignatus (2015o). Helaas pleegt Drenth dan een inbreuk op de integriteit van wetenschap door mijn positie verkeerd voor te stellen en persoonlijk zwart te maken, en te suggereren dat hij als psycholoog bijzondere gedachten heeft t.a.v. mijn motieven, zie Colignatus (2015p).

Ik heb wiskundige Van de Craats en psycholoog Wilbrink geschreven over mijn bezwaren t.a.v. specifieke teksten. Zij weigeren daarnaar te kijken, en dit laatste acht ik een inbreuk op de integriteit van wetenschap, zie Colignatus (2015k).

In bilaterale communicatie in 2014 en 2015 schrijft Hickendorff me psychometrist te zijn en geen didactica wiskunde. Het is wetenschappelijk integer om dit helder te zeggen, en het helpt ons bovendien begrijpen wat er gaande is. Het blijft opmerkelijk dat iemand onderzoek doet op een terrein waarop betrokkene niet deskundig is en dat zelfs niet ambieert. Dit wordt problematisch wanneer grenzen t.a.v. conclusies en implementaties worden overschreden. Hickendorff (2011:229-239) presenteert "substantive findings" maar dat kan niet wanneer je de substantie niet beheerst. Als analogie: bij de operatie heeft de chirurg het been op deskundige wijze verwijderd, maar het was het verkeerde been. Het is niet ondenkbaar dat zo'n "specialisatie" / deformatie breder speelt binnen CITO, ook, wegens de ontsporing via Freudenthal t.a.v. die didactiek van wiskunde en de weigering van zulke "realistische wiskunde" didactici tot adequaat onderzoek. Ik heb Hickendorff gevraagd waarom haar proefschrift niet naar Van der Plas (2009) en Verhoef (2009) verwijst, en waarin het woord "algebra" niet voorkomt, met bovenstaande uitleg van het belang daarvan, zie ook Colignatus (2015n). Het lijkt me wenselijk dat zij haar conditionele aanpak nog eens helder aan de minister van onderwijs schrijft en op haar website plaatst. Het is onjuist dat zij hier niet op ingaat. Opmerkelijk is dat Hickendorff anno 2015 lid is van de PsyNIP / COTAN, en het lijkt me dat aldaar bezinning wenselijk is, ook omdat het College voor Toetsen en Examens (CvTE) naar COTAN verwijst.

Ten aanzien van de ethiek van onderzoek aan en experimenteren op kinderen wil ik ook nog het volgende opmerken.

Sommigen zoals Freudenthal weiger(d)en om gestructureerd onderzoek te doen en statistiek bij te houden, met het argument dat de populatie veel te heterogeen is. Een beslissing op praktijkervaring zou verdedigbaar kunnen zijn, wanneer het bijkans onmogelijk is om de statistiek goed bij te houden of het juiste beslismodel te formuleren. Je zult immers een beslissing moeten nemen. De kinderen komen de klas binnen en je moet ergens mee beginnen. Wanneer je geen beslissing neemt en gods water over gods akker laat lopen, dan neem je per saldo ook een beslissing, en doe je alleen maar of je het niet doet. In dit soort gevallen lijkt het logisch om zo'n beslissing voor te leggen aan het wetenschappelijk forum. Echter, je forum kiezen in een sekte, die je eventueel zelf vormt, is onjuist. Voor het onderwijs in wiskunde is derhalve de vorming van een "Simon Stevin Instituut" (SSI) nodig, zie Colignatus (2012b) en (2015l). Vroeger ontstonden verenigingen van docenten, maar het parlement zou behoren te begrijpen dat belastinggelden nodig zijn waar het onjuist is alles over te laten aan contributiegelden van welwillende leden.

Wanneer ik hier en elders kritiek op het huidige onderwijs in wiskunde uit dan kan een lezer wellicht denken dat ik zou vinden dat het meteen op mijn voorgestelde wijze zou moeten worden uitgevoerd. Dat is natuurlijk niet zo. Het lijkt me beter dat er eerst zo'n SSI komt, waarin eindelijk het klimaat bestaat om op nette manier over je onderzoeksresultaten te spreken zonder dat wiskundigen de discussie saboteren, en psychologen en psychometristen eveneens uitspraken doen zonder zich in het wetenschappelijk onderzoek aan onderwijs in

wiskunde te verdiepen. In zo'n situatie kan dan bekeken worden wat er van mijn analyses overblijft voor de onderwijspraktijk. Het zou wel onjuist zijn om op zo'n situatie te wachten met het presenteren van mijn analyses en voorstellen om van "wiskunde" tot wiskunde te komen. Die analyses geven juist voorbeelden die ondersteunen dat er zo'n SSI zou moeten komen.

Laat dit SSI gelden voor toekomstige situaties. Dan is er nog steeds de huidige situatie met een onverantwoord en commercieel experiment op kinderen, zie Colignatus (2015b). De Onderwijsinspectie is verantwoordelijk voor het toezicht op de huidige situatie. Ik heb Inspecteur-generaal Monique Vogelzang geschreven over de kwestie (2015-11-26, kenmerk M0155149). Een medewerker X schrijft terug (2015-12-18): "Het is niet de taak van de inspectie de discussie tussen aanhangers van de diverse rekenmethodieken te beslechten. Dank voor uw interesse. Misschien is er belangstelling voor bij de Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek (NRO)." Dit antwoord suggereert alsof het hier alleen zou gaan om een (wetenschappelijk) geschil van inzicht, waarvoor betrokkenen zelf verantwoordelijk zijn om het geschil te beslechten. Maar daarover heb ik de Onderwijsinspectie niet geschreven. Het is bizar dat de medewerker X de melding over het huidige onverantwoorde experiment op kinderen zo voorstelt. Ik heb helder aangegeven dat het hier geen wetenschappers maar ideologen en sektariërs betreft. Iemand "aanhanger" noemen is geen vrijbrief tot experimenteren op kinderen. De verwijzing naar NRO is niet aan de orde. De bescherming van kinderen t.a.v. wat er nu feitelijk gebeurt ligt bij de Onderwijsinspectie, niet bij NRO. Ik heb derhalve geen antwoord ontvangen op het punt dat mijn brief aan de orde stelde, d.w.z. Colignatus (2015b). Wellicht is het tijdvenster voor 2015-2016 nu gesloten maar dan is er 2016-2017 waarin de huidige onverantwoorde gang van zaken kan worden stopgezet. Meningsvorming binnen het vak psychologie is daarvoor ook relevant.

Wellicht dat ter verduidelijking Bijl (2015) geciteerd mag worden, maar dit heeft dan alleen nog maar betrekking op leerlingen die na falend primair onderwijs toch nog VWO hebben gehaald: "In de berichtgeving van over de rekentoets lees ik "Alleen als blijkt dat meer dan 5% van de vwo-leerlingen in 2016 zakt vanwege de rekentoets, dan wordt het vangnet in werking gesteld". Blijkbaar vindt men het acceptabel om zo'n vijftienhonderd kandidaten te laten zakken op de rekentoets. 5% klinkt als "niet veel". Maar het gaat dan wel om 1500 leerlingen en dat vind ik wél veel. Het cynisme waarmee men bereid is om 1500 leerlingen aan die verwenste rekentoets te offeren, steekt mij. Het gaat hier om 1500 arme zielen die qua wiskunde meestal slechts met grote moeite met de hakken over de sloot geraken. En die mogen op de rekentoets van politiek Den Haag vervolgens stuk lopen. Een grof schandaal. Ik ben van mening dat elke leerling die geen diploma krijgt vanwege de rekentoets er één teveel is." Ikzelf zou het wat anders formuleren, en dat wordt dan bijvoorbeeld dit gehele artikel.

Conclusies

In 2016 geldt wat ik in 2008 schreef: er is een noodzaak van een parlementair onderzoek (dit worde beter een enquête, met het onder ede horen van getuigen) en er is een noodzaak van een Simon Stevin Instituut (SSI). Het SSI zorgt voor: (a) wiskunde in plaats van "wiskunde" (het *Wat*), (b) eindelijk pas een verantwoorde besluitvormingsstructuur voor didactiek (het *Hoe*), met vrijheid voor docenten maar broodnodige mogelijkheden voor afstemming, (c) een bevrijding van de dominantie van abstract denkende (en wangedragende) wiskundigen, en (d) empirisch onderzoek, beter dan de huidige psychometrie, en respect voor praktijkervaring. Vervolgens is er ook de ontwikkeling naar Academische Scholen, zoals de Academische Ziekenhuizen, met samengaan van onderwijs en onderzoek. De conclusie uit 2008 tot een parlementair onderzoek blijkt vaak afgewezen door een fundamenteel wantrouwen tegen het parlement. Het parlement mag zich afvragen waarom mensen dan niet meer in de reëel bestaande democratie geloven. (De "kroonjuwelen" van D66 zijn overigens volksoplichterij, misschien kon jurist Hans van Mierlo al in 1966 niet goed rekenen? Zie Cool (2012).) Bij dit alles heeft dit artikel getoond hoe het vak psychologie betrokken is, via onderwijspsychologie, cognitieve psychologie, epistemologie, methodologie, psychometrie, en sociale psychologie met de cognitieve dissonantie via disciplines. De juiste weg naar verbetering is via de Forum Theorie, zie De Groot & Visser (2003), met daarbinnen een belangrijke rol voor de empathie voor het vermijden van misverstanden, zie Smaling (2008).

Literatuur

Colignatus is sinds 2004 de wetenschappelijke naam van Thomas Cool, econometrist en leraar wiskunde.

Onderstaande lijst volgt de vorm van Econometrica en nog niet APA.

Aronson, E. (1992), "The social animal", Freeman, sixth edition

Bosman, A. et al. (2009), Tijdschrift voor Orthopedagogiek, Jrg. 48 Nr. 5 (mei) (integraal)

Borsboom, D. (2006). The attack of the psychometricians. Psychometrika, 71, 425-440, <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2779444>

Bijl. H. (2015), "Vangnet rekentoets", <http://www.wiskundebrief.nl/718.htm#8>

Cool, Th. (1996), "An institutional explanation of structural unemployment of low income labour", Presentation for the 7th Research Day of the Social Sciences, Amsterdam, April 11 & 12 1996, <http://econpapers.repec.org/paper/wpawuwpot/9605001.htm>

Cool, Th. (2012), "Laat D66 zich opheffen", mijnbestseller.nl, <http://thomascool.eu/SvHG/LDZO/Index.html>

Colignatus, Th. (2000, 2005, 2011), "Definition & Reality in the General Theory of Political Economy" (DRGTPE), Samuel van Houten Genootschap, <http://thomascool.eu/Papers/Drgtpe/Index.html>

Colignatus, Th. (2001, 2014), "Voting Theory for Democracy", Thomas Cool Consultancy & Econometrics, <http://thomascool.eu/Papers/VTFD/Index.html>

Colignatus, Th. (2008), "De wenselijkheid van een parlementair onderzoek naar het onderwijs in "wiskunde" en naar wat "wiskunde" heet te zijn", <http://thomascool.eu/Thomas/Nederlands/Wetenschap/Artikelen/2008-04-17-WiskundeOnderwijs.pdf>

Colignatus, Th. (2009, 2015), "Elegance with Substance", Samuel van Houten Genootschap & mijnbestseller.nl, <http://thomascool.eu/Papers/Math/Index.html>

Colignatus, Th. (2012a), "De eenvoudige wiskunde van Jezus", mijnbestseller.nl, <http://thomascool.eu/Papers/EWVJ/Index.html>

Colignatus, Th. (2012b), "Een kind wil aardige en geen gemene getallen", mijnbestseller.nl, <http://thomascool.eu/Papers/AardigeGetallen/Index.html>

Colignatus, Th. (2014a), "De KNAW thema-bijeenkomst "Rekenen" deugt niet (30 juni 2014 over het onderwijs, het vak en de toets)", <http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-07-02-KNAW-Rekenen-deugt-niet.html>

Colignatus, Th. (2014b), "Email aan LOWI - N.a.v. de "KNAW Thema-bijeenkomst Rekenen", <http://www.thomascool.eu/Papers/Math/2014-07-08-Colignatus-aan-KNAW-LOWI.html>

Colignatus, Th. (2014c), "Verklaring specifiek t.a.v. prof. J.K. Lenstra. / Fwd: Re: Volledigheidshalve", <http://www.thomascool.eu/Papers/Math/2014-07-22-Aan-KNAW-LOWI-tav-Jan-Karel-Lenstra.html>

Colignatus, Th. (2015a), "A child wants nice and no mean numbers", Samuel van Houten Genootschap & mijnbestseller.nl, <http://thomascool.eu/Papers/NiceNumbers/Index.html>

Colignatus, Th. (2015b), "Het rekenexperiment op kinderen moet en kan worden beëindigd", WiskundeE-brief, nummer 721, 29 novem-ber 2015, <http://www.wiskundebrief.nl/721.htm#5>

met lange versie <http://thomascool.eu/Papers/AardigeGetallen/2015-11-23-Het-reenexperiment-op-kinderen-moet-en-kan-stoppen.html>

Colignatus, Th. (2015c), "Het verschil tussen wiskunde en "wiskunde" verklaard. Wat parlement en commissie Onderwijs2032 nog niet inzien", <http://thomascool.eu/Papers/AardigeGetallen/2015-10-14-Rekenen-Fraude-Freudenthal-Parlement.pdf>

Colignatus, Th. (2015d), "Computer algebra is a revolution. But 21st century skills ?", <https://boycottholland.wordpress.com/2015/12/08/computer-algebra-is-a-revolution-but-21st-century-skills-q>

Colignatus, Th. (2015e), "Pierre van Hiele, David Tall and Hans Freudenthal: Getting the facts right", <http://arxiv.org/abs/1408.1930>

Colignatus, Th. (2015f), "Van Hiele 1957 of Freudenthal 1987?", Wiskunde-brief, nummer 718, 8 november 2015, <http://www.wiskundebrief.nl/718.htm#7>

Colignatus, Th. (2015g), "A general theory of knowledge", <https://boycottholland.wordpress.com/2015/11/24/a-general-theory-of-knowledge>

Colignatus, Th. (2015h), "Pierre van Hiele and Stellan Ohlsson", <https://boycottholland.wordpress.com/2015/09/03/pierre-van-hiele-and-stellan-ohlsson>

Colignatus, Th. (2015i), "Gaat leren van concreet naar abstract, of andersom ?", <http://thomascool.eu/Papers/AardigeGetallen/2015-09-22-Van-concreet-naar-abstract.html>

Colignatus, Th. (2015j), "Pierre van Hiele and epistemology", <https://boycottholland.wordpress.com/2015/09/08/pierre-van-hiele-and-epistemology>

Colignatus, Th. (2015k), "Breach by Jan van de Craats and Ben Wilbrink w.r.t. scientific integrity", <http://www.thomascool.eu/Papers/Math/2015-09-15-Breach-by-Jan-van-de-Craats-and-Ben-Wilbrink-wrt-scientific-integrity.html>

Colignatus, Th. (2015l), "The power void in mathematics education", <https://boycottholland.wordpress.com/2015/10/31/the-power-void-in-mathematics-education>

Colignatus, Th. (2015m), "Pierre van Hiele and Adriaan de Groot", <https://boycottholland.wordpress.com/2015/11/06/pierre-van-hiele-and-adriaan-de-groot>

Colignatus, Th. (2015n), "'Algebra' is a troubling word", <https://boycottholland.wordpress.com/2015/12/18/algebra-is-a-troubling-word>

Colignatus, Th. (2015o), "ALLEA defines 'research integrity' too narrow", <https://boycottholland.wordpress.com/2015/11/26/allea-defines-research-integrity-too-narrow>

Colignatus, Th. (2015p), "Why ALLEA doesn't see censorship of science in Holland", <http://thomascool.eu/Papers/Drgtpe/Crisis-2007plus/2015-12-16-Why-ALLEA-doesnt-see-censorship-of-science-in-Holland.pdf>

Colignatus, Th. (2015q), "Research on number sense tends to be invalid", <https://boycottholland.wordpress.com/2015/08/29/research-on-number-sense-tends-to-be-invalid>

Colignatus, Th. (2015r), "De Stichting Goed Rekenonderwijs (SGR) deugt ook al niet", <http://thomascool.eu/Papers/AardigeGetallen/2015-09-23-SGR-deugt-ook-al-niet.html>

Colignatus, Th. (2015s), "The need for a standard for the mathematical pronunciation of the natural numbers. Suggested principles of design. Implementation for English, German,

French, Dutch and Danish", <http://thomascool.eu/Papers/NiceNumbers/2015-09-02-Numbers-Need-for-a-standard.pdf>

Colignatus, Th. (2016), "Psychometristen studeren onvoldoende op didactiek van wiskunde en maken rekentoetsen die ze niet begrijpen", <http://thomascool.eu/Papers/AardigeGetallen/2016-01-31-Enkele-emails-rekentoets-psychometrie.pdf>

Craats, J. van de (2007), "Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen, NAW 5/8 nr. 2 juni 2007, p132-136, <http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2007-08-2-132.pdf>

Doorman, M. (2015), "Anti-didactische inversie", *Euclides* 91 no 3 p11-12

Friso-Van den Bos, I. (2014), "Making sense of numbers: early mathematics achievement and working memory in primary school children", <http://dspace.library.uu.nl/handle/1874/297856>

Groot, A.D. de (1961, 1994), "Methodologie", Mouton, http://www.dbnl.org/tekst/groo004meth01_01

Groot, A.D. de, & H. Visser (2003), "Het forumkenmerk van wetenschap. Argumenten voor een nieuwe traditie", *KNAW*, <http://www.knaw.nl/nl/actueel/publicaties/het-forumwaarmerk-van-wetenschap>

Heuvel-Panhuizen, M. van den, A. Robitzsch, A. Treffers, en O. Köller (2009), "Large-scale assessments of change in student achievement: Dutch primary school students' results on written division in 1997 and 2004 as an example", *Psychometrika*, 74(2): 351-365, <http://link.springer.com/article/10.1007/s11336-009-9110-7>

Hiele, P.M. van (1957), "De problematiek van het inzicht. Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof", proefschrift Utrecht

Hiele, P.M. van (1973), "Begrip en inzicht", Muussens

Hickendorff, M., W.J. Heiser, C.M van Putten, en N.D. Verhelst (2009), "How to Measure and Explain Achievement Change in Large-Scale Assessments: A Rejoinder", *Psychometrika*. 2009 Jun; 74(2): 367-374, <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2792334>

Hickendorff, M. (2011). Explanatory latent variable modeling of mathematical ability in primary school: Crossing the border between psychometrics and psychology. Thesis, Leiden. <https://openaccess.leidenuniv.nl/handle/1887/17979>

Hoorn, M. van (2010), "'Elke positieve actie begint met critiek'", *NAW* 5/11 nr. 1 maart, p 28-29, <http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2010-11-1-028.pdf>

Hoorn, M. van (2014), "'Hoed u in het onderwijs voor extreme oplossingen'", *NAW* 5/15 nr. 4 december, p257-263, <http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2014-15-4-257.pdf>

Kirschner, P. & B. Wilbrink (2014), "Rekentoetsen-met-contexten toetsen geen rekenen", *Blogcollectief Onderzoek Onderwijs*, <http://onderzoekonderwijs.net/2014/06/17/rekentoetsen-met-contexten-toetsen-geen-rekenen> zie ook http://benwilbrink.nl/publicaties/14wilbrink_kirschner_rekentoetsen.htm

KNAW (2009), "Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering", <https://www.knaw.nl/nl/actueel/nieuws/knaw-rekenvete-zinloos> en <https://www.knaw.nl/shared/resources/actueel/publicaties/pdf/advies-rekenonderwijs-op-de-basisschool>

Koolstra, G. (2015a), "Brochures rekentoets vo 2016 gepubliceerd", *Wiskunde-brief*, nummer 718, 8 november 2015, <http://www.wiskundebrief.nl/718.htm#2>

- Koolstra, G. (2015b), "Bèta vakverenigingen kritisch over Onderwijs2032", nummer 720, 22 november 2015, <http://www.wiskundebrief.nl/720.htm#7>
- Kooij, H. van der (2015), "Ik ben met pensioen", WiskundeE-brief nummer 719, 15 november 2015, <http://www.wiskundebrief.nl/719.htm#7>
- Kristiansen, N. (2008), "Enogseksti eller sekstien", Forskning.no, August 4, <http://forskning.no/sprak/2008/08/enogseksti-eller-sekstien>
- Milikowski, M. (2009), "Op zoek naar het verdronken kalf", Tijdschrift voor Orthopedagogiek, Jrg. 48 (mei 2009) Nr. 5, p. 216-218
- Ohlsson, S. (2011), "Deep learning: How the mind overrides experience", Cambridge
- Plas, L. van der (2009), "Rekenvaardigheid in relatie tot wiskunde", Tijdschrift voor Orthopedagogiek, Jrg. 48 (mei 2009) Nr. 5, p205-211, <http://www.liesbethvanderplas.nl/rekenvaardigheid-in-relatie-tot-wiskunde>
- Rietdijk-Helmer, M.L.A. (red.). 2005. Steeds minder leren. De tragedie van de onderwijshervormingen. IJzer
- Ros, B. (2009), "Staartdelen of happen? Een pittig tweegesprek over rekenen", Didactief online, 1-2, p4-8, http://didactiefonline.nl/images/stories/Opinie/Didactief_jan-feb_2009_staartdelen_of_happen.pdf
- Smaling, A. (2008), "Dialogo en empathie in de methodologie", Uitgeverij SWP, <http://www.swpbook.com/1110#.VoePiFlq-Uk>
- Smaling, A.. (2009). Is dat wel zo'n goed idee, debatteren?. KWALON (14) 1. http://www.boomlemmatijdschriften.nl/tijdschrift/KWALON/2009/1/KWALON_2009_014_001_001
- Verhoef, G. (2009), "Realistisch rekenen: oorsprong, principes en bezwaren", Tijdschrift voor Orthopedagogiek, Jrg. 48 (mei 2009) Nr. 5, p219-224
- Verschaffel, L. & J. Torbeyns (2011), "Hoofd- versus cijferrekenen in Vlaanderen. Resultaten van een pilotstudie met de "choice/no-choice" methode", p258-270, in "The traveling science man. Liber Amicorum Jan Karel Lenstra", CWI <http://oai.cwi.nl/oai/asset/19553/19553D.pdf>
- Visser, H. (2005 ?), "Realistisch reken- en wiskundeonderwijs. Vaardigheden of inzicht?", <http://henkxvisser.nl/Realistisch%20reken-%20en%20wiskundeonderwijs.pdf>
- Xenidou-Dervou, I. (2015), "Setting the Foundations for Match Achievement: Working Memory, Nonsymbolic and Symbolic Numerosity Processing", <http://dare.ubvu.vu.nl/handle/1871/52176>
- Zijlmans, M. (2004), "Zeg nou maar twintig-één tegen uw 21", de Volkskrant, 31 januari, <http://www.volkskrant.nl/binnenland/zeg-nou-maar-twintig-één-tegen-uw-21~a719315>