Negatieve getallen, breuken en Simon Stevin Instituut

Thomas Colignatus
10 januari 2016

Inleiding

Leerlingen kunnen moeite hebben met -(-*x*) = *x* en 1/(1/*x*) = *x* voor $x \neq 0$. In principe is dit reeds in het primair onderwijs afgekaart, maar daar kun je tegenwoordig niet op aan, en misschien is het sowieso aardig om in de klas nog eens op een andere manier naar deze zaken te kijken. Het voorstel is om internationaal af te spreken dat $H = -1$, zodat $i = \sqrt{H}$, en vervolgens *H* uit te spreken als "eta" om te voorkomen dat Nederlanders en Duitsers bij *x*^*H*^*H* = *x* "ha ha" moeten zeggen.

Ik kwam op deze *H* in email-discussie met Peter Harremoës die noemde dat sommige leerlingen problemen hebben met -(-*x*). Ik draag deze *H* graag aan hem op, zie ook Harremoës (2000), maar de keuze voor *H* is dat er ook een geest van de "-1" in valt te herkennen. Het is Van Hiele (1973) die pleit voor afschaffen van breuken 1/*x* via gebruik van *x*^(-1). Dit lijkt me onverstandig, want door die –1 zouden leerlingen kunnen denken dat ze een aparte bewerking moeten doen. Bij gebruik van *H* wordt het echter vanzelfsprekend dat het beter is om 1/*x* door *x*^*H* te vervangen. Je spreekt *x*^*H* ook uit als "per *x*" zodat duidelijk is dat hier een bijzonder verschijnsel aan de orde is. Merk op dat 1/3, 1/4, 1/5, ... gangbaar worden uitgesproken als een-derde, een-vierde, een-vijfde, ... en dat het hier rangwoorden derde, vierde, vijfde ... betreft, zodat aldus rangwoorden worden misbruikt om ook breuken te benoemen, en hier een extra puntje is gevonden in de verklaring waarom leerlingen moeite met breuken hebben (want wat hebben die nu met rangorden te maken ?).

Negatieve getallen

Onderscheid is tussen "minus" voor de operator en "min" wanneer een negatief getal (min-getal, mintal) wordt gebruikt. Voor negatieve getallen blijven we –*x* schrijven, voor $x > 0$. In het primair onderwijs en voor remedial teaching kunnen we uitleggen dat $-x = H\, x$, waarbij *H* de spiegeling op de getallenlijn is. Op dezelfde wijze is $H\, H = 1$, want je spiegelt en daarna weer terug. Dan is ook $x + H\, x = 0$ inzichtelijk, en dit mag op meer manieren geschreven worden als $x - x = x + (-1)\, x = x + (-x)$. Zie verder Colignatus (2015a).

Breuken

Naast het al genoemde probleem van 1/(1/*x*) is er het andere probleem dat de traditionele notatie van 2½ gelezen kan worden als 2 maal ½ (zoals 2√2). Vooral in het handschrift van leerlingen wil er wel eens een spatie ontstaan zodat 2 ½ = 1 alleen maar correct lijkt. Klassiek is het beter om 2 + ½ zo te laten staan, het is immers ook "twee-en-een-half". We kunnen dan classificeren: 2½ is traditioneel, 2 + ½ is klassiek, en 2 + 2^*H* is neoklassiek. Zie onderstaande tabel. De linker kolom is nette wiskunde, de rechterkolom is "wiskunde" (want brengt leerlingen met kromme notatie in verwarring). Deze tabel en sectie zijn ontleend aan Colignatus (2015b).

	Wiskunde (empirici, ingenieurs)	*"Wiskunde" (wiskundigen)*
Nieuw	Neoklassiek: $2 + 2^H$	"21st century skills" ("realistische wiskunde" met een andere naam)
Oud	Klassiek: 2 + ½	2½ Traditionele wiskunde: veel oefenen "Realistische wiskunde": verdoezelen

Zie Colignatus (2015c) voor "21st century skills". Van der Plas (2008) legt uit dat traditionele wiskundigen zoals Van de Craats veel willen oefenen op breuken als 2½ / 3⅓ terwijl dit in "realistische" leerboeken in het primair onderwijs nauwelijks genoemd wordt. Je kunt dat laatste wel een beetje begrijpen, want in handschrift lees je gemakkelijk 2 ½ / 3 ⅓ = 1 / 3 ⅓ = 1 / 9.

Laten we die 2½ / 3⅓ nader bekijken op traditionele en neoklassieke wijze. Een handigheidje is 3 × 3⅓ = 10 te gebruiken, maar de bedoeling is nu om systematisch te werken voor wanneer het niet zo mooi uitkomt. Neoklassiek wiskundig krijgen we: $(2 + 2^H)\ (3 + 3^H)^H$. Uiteindelijk moeten leerlingen toch machtsverheffen leren, dus het lijkt aanvankelijk misschien lastig maar in alle waarschijnlijkheid zal dit traject toch sneller en inzichtelijker zijn. Vanzelfsprekend is het alleen een voorstel en kan bij leerlingen gekeken worden of deze verwachting ook wordt waargemaakt. Het zijn de leerlingen die bepalen wat ze kunnen leren.

Hierbij geldt, volledigheidshalve: (1) De wiskundige betekenis van inverse x^H is dat: $x\ x^H = 1$ (voor $x \neq 0$). (2) Voor machtsverheffen geldt $x = (x^H)^H$. (3) Op de rekenmachine is een numerieke benadering (*x*)^(-1). (4) Het is niet bezwaarlijk om iets als 2 3^*H* (of "2 per 3") een getal te noemen, maar je zou ook kunnen afspreken om de term "getalwaarde" te gebruiken voor de decimale ontwikkeling 0,6666..... Bij breuken is het altijd lastig om te wisselen tussen bewerking en getal (Gray & Tall, "procept"), en de cruciale notie blijft dat sommige breuken niet verder vereenvoudigd kunnen worden.

Omdat menigeen niet aan tussenstappen is gewend, schrijven we alle kleine stapjes uit. Bij gewenning kunnen grotere stappen genomen worden.

$(2 + 2^H)\ \ (3 + 3^H)^H$	Maak dit zo eenvoudig mogelijk
$(2\ \ (2\ 2^H) + 2^H)\ \ (3\ (3\ 3^H) + 3^H)^H$	Gebruik $x\ x^H = 1$
$(4\ 2^H + 2^H)\ \ (9\ 3^H + 3^H)^H$	Uitvermenigvuldigen
$(4 + 1)\ 2^H\ \ \ ((9 + 1)\ 3^H)^H$	Breuken buiten haakjes halen
$5\ 2^H\ \ 10^H\ \ 3$	Gewichten optellen
$5\ 2^H\ \ (5\ 2)^H\ \ 3$	Ontbinden in factoren (priemgetallen !)
$5\ 5^H\ \ 2^H\ \ 2^H\ \ 3$	Gebruik $x\ x^H = 1$
$3\ 4^H$	3 per 4

Ter vergelijking is er de kromme manier van de traditionele "wiskunde". Ook de klassieke deling y / x noodzaakt extra stappen waarin de schrijfwijze bepalend is en niet wat je aan het doen bent.

2½ / 3⅓	Gevaarlijke notatie
(2 + ½) / (3 + ⅓)	Maak er wiskunde van, anders werkt het niet
(2 (2 ½) + ½) / (3 (3 ⅓) + ⅓)	Gebruik $x / x = 1$ (schrijfwijze schept probleem)
(4 ½ + ½) / (9 ⅓ + ⅓)	Uitvermenigvuldigen
(4 / 2 + ½) / (9 / 3 + ⅓)	Gelijke noemers gemaakt
(5 / 2) / (10 / 3)	Gewichten optellen (5 / 2: getal of bewerking ?)
(5 / 2) (3 / 10)	Delen door breuk is maal omgekeerde
(5 3) / (2 10)	Uitvermenigvuldigen
3 / (2 2)	Ontbinden en wegdelen van gelijke factoren
3 / 4	drie-vierde (misbruik van rangwoord "vierde")

Simon Stevin Instituut

Het bovenstaande is alleen een beschouwing en voorstel tot nader onderzoek. Bepaalde voordelen lijken evident maar het blijft nodig om dit in de praktijk te onderzoeken, en consensus te krijgen dat dit ook zo in toetsen en leerboeken gebruikt mag worden. In de huidige situatie is het klimaat voor zulk onderzoek en afstemming danig verstoord. Er lijkt een tweespalt te zijn tussen "realisten" en "traditionelen" die alle aandacht trekt en die deze derde weg van wetenschap en onderzoek negeren en blokkeren. Eerder adviseerde ik daarom tot de oprichting van een Simon Stevin Instituut (SSI) dat het klimaat schept waarin onderzoek en afstemming op nette manier kunnen gebeuren, zie Colignatus (2008) en iets geredigeerd in (2012). Dit is heel wat anders dan het Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek (NRO) waarin leraren en andere stakeholders nauwelijks invloed hebben. Zie Colignatus (2015b) voor een schema t.a.v. het beleidsvacuum.

Literatuur

Colignatus is de wetenschappelijke naam van Thomas Cool, Econometrist (Groningen 1982) en leraar wiskunde (Leiden 2008).

Colignatus (2008), "Het Simon Stevin Instituut", opstel, http://thomascool.eu/Thomas/Nederlands/Wetenschap/Artikelen/2008-11-11-Simon-Stevin-Instituut.pdf

Colignatus (2012), "Een kind wil aardige en geen gemene getallen", mijnbestseller, http://thomascool.eu/Papers/AardigeGetallen/Index.html

Colignatus (2015a), "A child wants nice and not mean numbers", mijnbestseller.nl, pdf online, http://thomascool.eu/Papers/NiceNumbers/Index.html

Colignatus (2015b), "Het verschil tussen wiskunde en "wiskunde" verklaard. Wat parlement en commissie Onderwijs2032 nog niet inzien", memo verstuurd aan parlement en Onderwijs2032, http://thomascool.eu/Papers/AardigeGetallen/2015-10-14-Rekenen-Fraude-Freudenthal-Parlement.pdf

Colignatus (2015c), "De NVVW-lezing van Gravemeijer zet de wereld op zijn kop", http://www.wiskundebrief.nl/724.htm#6

Harremoës, P. (2000), "Talnotation", LMFK-bladet, 22(5), May 2000, http://www.harremoes.dk/Peter

Hiele, P. van (1973), "Begrip en inzicht", Muusses

Plas, L. van der (2008), Rekenvaardigheid in relatie tot wiskunde", congresbijdrage, gepubliceerd in het Tijdschrift voor Orthopedagogiek 5 mei 2009 http://www.liesbethvanderplas.nl/rekenvaardigheid-in-relatie-tot-wiskunde