Cirkels in vierkanten. Oppervlakte leidt tot π en omtrek leidt tot Θ = 2 π (archi = 2 pi)

Thomas Colignatus
http://thomascool.eu
9 januari en 16 april 2014 en 11 juli en 7 september 2016

Samenvatting

Cirkels zijn niet alleen van belang voor hun oppervlakte maar ook voor het draaien oftewel het maken van slagen in het rond. Voor het vinden van de omtrek en oppervlakte van cirkels zijn er minstens twee wegen. De ene weg vertrekt vanuit de oppervlakte en vindt de omtrek via differentiëren. Hier blijkt parameter π van belang. Voor leerlingen kan het echter verwarrend zijn dat een aantal van *t* draaien leidt tot 2π *t* radialen, want waarom moet je π steeds met 2 vermenigvuldigen ? Internationaal is er enige discussie over het gebruik van τ = 2 π (tau). Deze τ lijkt echter sterk op het gangbare symbool voor de straal *r.* Mijn advies is het gebruik van hoofdletter theta Θ en dit uit te spreken als "archi", met verwijzing naar Archimedes. Een andere weg is dan vanuit de omtrek te vertrekken en de oppervlakte vinden via integreren. Hier blijkt parameter Θ = 2π inderdaad van belang. Voor leerlingen kan het inzichtelijker zijn dat *t* draaien leiden tot *t* Θ radialen.

PM 2016. In *Conquest of the Plane* (COTP) begint *calculus* met oppervlak en komt pas daarna de afgeleide in beeld. Toch is daar de keuze voor Θ. Het blijft nuttig om zicht te hebben op deze diverse mogelijke didactische invalshoeken, om te kunnen testen wat het beste werkt. Over het geheel gezien lijkt de aanpak via Θ toch beter, en lijkt de aanpak via π hieronder minder succes te zullen hebben.

Opties	*Eerst oppervlak dan omtrek*	*Eerst omtrek dan oppervlak*
π	Hieronder, traditioneel	Omtrek gedeeld door diameter
Θ	COTP t.a.v. *calculus*	Hieronder, alternatief

Nu in september 2016 is er de samenvoegende suggestie om naast draaicirkel ook draaischijf te hanteren, zie https://boycottholland.wordpress.com/2016/09/05/trigonometry-rerigged-2-0

Onderstaande bespreking is niet zo geslaagd, maar noemt wel de relevante punten.

Inleiding

Het volgende gaat over de omtrek en oppervlakte van cirkels. Internationaal is er enige discussie over het gebruik van τ = 2 π (tau), zie de verwijzingen naar Bob Palais, Vi Hart en Michael Hartl. [0] De parameter τ associeert met het aantal *turns,* oftewel het aantal draaien of slagen in het rond*.* Bij een kwart (¼) draai is de cirkelboog τ / 4 radialen, en in het algemeen is bij *t* draaien de boog *t* τ radialen. Een bezwaar is dat τ nogal lijkt op *r,* het gangbare symbool voor de straal, juist ook in het handschrift van leerlingen*.* Toen ik nog onbekend was met die internationale discussie had ik τ al overwogen maar hierom verworpen, en mijn suggestie was en blijft het gebruik van hoofdletter theta oftewel Θ. Omdat ook kleine theta oftewel θ voor hoeken wordt gebruikt is het nuttig Θ uit te spreken als "archi" (Archimedes). Wat het beste werkt moeten experimenten uitwijzen. Mijn suggestie voor de internationale discussie is dan niet alleen τ te onderzoeken maar ook het gebruik van Θ (archi).

Het is interessant te zien hoe de parameter-varianten ieder in een eigen didactiek tot hun recht komen. Parameter π wordt gangbaar geïntroduceerd vanuit de meting van omtrek en oppervlakte. Paragrafen 1 t/m 5 hieronder geven een dergelijke traditionele aanpak, en zijn zo geschreven dat ze in de klas bruikbaar moeten zijn. In die aanpak komen de omwentelingen

[0] Thomas Colignatus (2012), "Mathematical constant Archimedes = Θ = 2 π = 6.2831853…", http://boycottholland.wordpress.com/2012/02/18/mathematical-constant-archimedes/

pas later aan de orde, maar dan is π al gevestigd zodat leerlingen zijn veroordeeld tot 2π. Het idee steeds te moeten vermenigvuldigen is een belasting voor leerlingen met weinig geheugenplaatsen. De betere leerlingen zoals docenten leren om 2π als een eenheid te zien, zie het "procept" van Gray & Tall, zie EWS. [1] Het zou mooi zijn wanneer die eenheid ook met een apart symbool als Θ mag worden weergegeven.

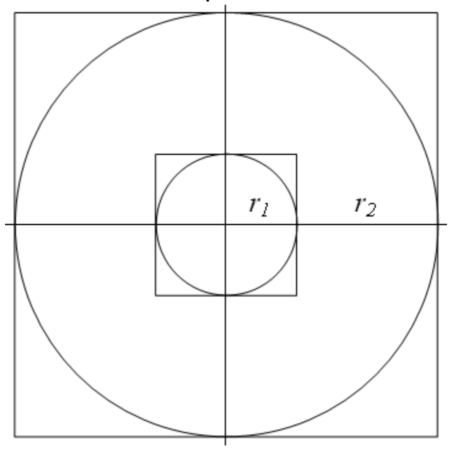
De uitleg in paragrafen 1 t/m 5 vormt een aanvulling op EWS uit 2009 en vindt deels zijn inspiratie in de artikelen uit 2010 van Yvonne Killian [2] over de oppervlakteformules en van Hessel Pot [3] over de verhoudingen. Een deel van paragrafen 1 t/m 5 is bruikbaar in de onderbouw wanneer leerlingen bezig zijn met verhoudingen. In de bovenbouw kan opgefrist worden t.a.v. de verhoudingen maar kan ook getoond worden hoe omtrek ontstaat door de oppervlakte te differentiëren. In paragraaf 6 bespreken we de didactische vraag voor leraren. Het is immers ook mogelijk te beginnen met omtrek en vandaaruit te integreren, en hier blijkt parameter Θ = 2π van belang. Deze aanpak maakt een soepeler overgang naar de omwentelingen mogelijk.

1. Grafisch uitgangspunt

De woorden "Omtrek" en "Oppervlakte" beginnen allebei met een "O". Daarom gebruiken we de *C* van Engels *Circumference* en de *S* van Engels *Surface.*

Ons uitgangspunt is *Figuur 1* met twee cirkels en vierkanten daaromheen. De binnenste cirkel met straat r_1 heeft daaromheen een vierkant met zijden van 2 r_1. Erbuiten is een andere cirkel met straal r_2 met daaromheen een vierkant met zijden van 2 r_2. Voor de oppervlakte van vierkanten geldt dat $S[V, r_i] = (2 r_i)^2 = 4 r_i^2$ voor i = 1, 2. Zie bijvoorbeeld de vier vierkanten met oppervlakten r_2^2.

Figuur 1: Cirkel *i* met straal r_i met vierkant eromheen, *i* = 1, 2



Denkelijk is hier nog een mooie oefening: "Bewijs dat de oppervlakte van de cirkel omgeschreven aan een vierkant het dubbel is van de oppervlakte van de cirkel, ingeschreven in dit vierkant." [4]

2. Oppervlakte van een cirkel

De grote vraag is nu wat we over de oppervlakte van de cirkels kunnen zeggen. In formule $S[C, r_i]$ = ?.

---

[1] Thomas Colignatus (2009), "Elegance with Substance", Dutch University Press. PDF op http://thomascool.eu/Papers/Math/Index.html

[2] Yvonne Killian (2010), "Oppervlakteformules", Euclides 85 (4), p 168, Februari

[3] Hessel Pot (2010), "Verhouding staat tot breuk als 4 staat tot 1", Euclides 85 (4), p 169-170, Februari

[4] Zie http://www.wisfaq.nl/show3archive.asp?id=70517&j=2013

Merk op: op de assen zijn geen getallen uitgezet. Wanneer je iedere cirkel met vierkant apart zou zien, kun je niet bepalen om welke straal het zou gaan. Welke straal *r* je ook kiest, het ene plaatje verschilt niet van het andere (met in- of uitzoomen).

Met name valt te kijken naar de *verhouding* van de oppervlakte van een cirkel en de oppervlakte van het omschreven vierkant. Het cruciale ruimtelijke en meetkundige inzicht is dat die verhouding *gelijk blijft.* Je kunt ook zeggen dat de verhouding *invariant* is.

Inzicht: $$\frac{\text{Oppervlakte van cirkel 2}}{\text{Oppervlakte van vierkant 2}} = \frac{\text{Oppervlakte van cirkel 1}}{\text{Oppervlakte van vierkant 1}}$$

Hieruit kunnen we afleiden dat de oppervlaktes van de cirkels in dezelfde verhouding staan als de oppervlaktes van de vierkanten.

Afleiding: $$\frac{\text{Oppervlakte van cirkel 2}}{\text{Oppervlakte van cirkel 1}} = \frac{\text{Oppervlakte van vierkant 2}}{\text{Oppervlakte van vierkant 1}}$$

Laten we $k = r_2 / r_1$ nemen. In formules krijgen we dan:

$$\frac{S[\mathrm{C}, r_2]}{4\ r_2^2} = \frac{S[\mathrm{C}, r_1]}{4\ r_1^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{S[\mathrm{C}, r_2]}{S[\mathrm{C}, r_1]} = \frac{4\ r_2^2}{4\ r_1^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = k^2$$

Voor de vierkanten is er een constante factor 4 voor het kwadraat van de stralen. Voor de cirkels is het verleidelijk ook een constante factor te veronderstellen. Kunnen we dat echter wel doen ? Laten we voorzichtig veronderstellen dat cirkel 1 een factor *p* heeft en cirkel 2 een factor *q*. Dus $S[\mathrm{C}, r_1] = p\ r_1^2$ en $S[\mathrm{C}, r_2] = q\ r_2^2$.

In dat geval:

$$\frac{S[\mathrm{C}, r_2]}{S[\mathrm{C}, r_1]} = \frac{q\ r_2^2}{p\ r_1^2} = \frac{q}{p}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \frac{q}{p}\ k^2$$

De verhouding moet echter k^2 zijn. Dus $p = q$. Voortaan nemen we $p = q = \pi \approx 3{,}14...$, met de Griekse letter Pi. Merk op dat $3 < \pi < 4$, want tel het aantal vierkantjes in *Figuur 1*.

Conclusie: De oppervlakte $S[r]$ van een cirkel met straal *r* wordt gegeven door $S[r] = \pi\ r^2$.

3. Omtrek van een cirkel

De omtrek van een vierkant $C[\mathrm{V}, r_i] = 8\ r_i$.

Voor de omtrek is het minder makkelijk om te zien dat de verhouding van de omtrekken van cirkel en omschreven vierkant gelijk blijft. Besef echter nogmaals dat de assen geen getallen hebben. Zoals hierboven geldt ook hier: Wanneer je iedere cirkel met vierkant apart zou zien, kun je niet bepalen om welke straal het zou gaan. Welke straal *r* je ook kiest, het ene plaatje verschilt niet van het andere.

We kunnen de bovenstaande redenering herhalen (oefening: doe dat ook).

We vinden voor een cirkel met straal *r* dat de omtrek $C[r] = \Theta\ r$, voor een bepaalde constante Θ. Dit laatste teken is de Griekse Hoofdletter Theta en we spreken dit uit als “archi” naar de Griekse wiskundige Archimedes (287-212 voor Christus). De waarde is $\Theta \approx 6{,}28... \approx 44 / 7$ en merk op dat $6 < \Theta < 8$. Eigenlijk geldt $\Theta = 2\pi$ maar dat vraagt nog een bewijs.

4. Differentiëren

We kunnen de omtrek zien als een schil rondom de oppervlakte. We nemen dan $r_2 = r_1 + h$, met h de dikte van de schil. De oppervlakte van de schil is bij benadering gelijk aan de omtrek maal de dikte van de schil. De foutenmarge wordt veroorzaakt door de kromming van die omtrek. Er geldt dus:

$$S[r + h] - S[r] \approx h\, C[r]$$

Wanneer $h = 0$ dan is de kromming in de oppervlakte niet relevant. We krijgen een exacte uitkomst wanneer we de limiet voor h naar nul nemen:

$$C[r] = \lim_{h \to 0} \frac{S[r+h] - S[r]}{h} = 2\pi r$$

Oftewel, de omtrek $C[r]$ van een cirkel met straal r volgt als de afgeleide van de oppervlakte $S[r]$:

$$C[r] = \mathbf{d}S[r] \,/\, \mathbf{d}r = 2\,\pi\, r.$$

We hebben nu ook bewezen dat $\Theta = 2\,\pi$.
Historisch is het gebruik van π ontstaan doordat men uitging van de doorsnede $d = 2\,r$ zodat de omtrek volgt als $\pi\, d$. Voor de oppervlakte ontstaat dan het lastiger $¼\, \pi\, d^2$. Nadien is het differentiëren ontdekt. Ook blijkt de straal een logischer variable dan de doorsnede. Dan is het logischer Θ te gebruiken dan π:

$$C[r] = \Theta\, r \quad \text{en} \quad S[r] = ½\, \Theta\, r^2$$

5. Samenvatting voor de leerlingen

Hier eindigt het betoog voor de leerlingen. De verworven inzichten kunnen zo worden samengevat:

(1) Activeren van ruimtelijk inzicht t.a.v. de invariantie van verhoudingen
(2) Afleiding voor oppervlakte en omtrek van de cirkel, juist in deze volgorde
(3) Toepassing van differentiëren, dit is ook een illustratie van die methode
(4) Θ is een logischer parameter dan π
(5) Numeriek $3 < \pi = \Theta / 2 < 4$ en $6 < \Theta < 8$, via de relatie met het vierkant
(6) Gebruik het vierkant eventueel als geheugensteuntje voor $\pi\, r^2$.

6. Discussie voor docenten

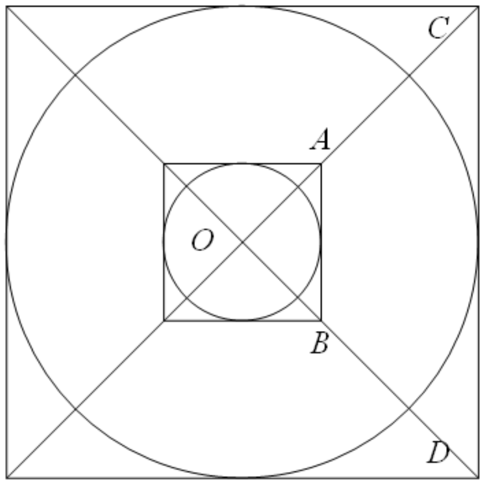
De voorgaande uitleg was uitgeschreven om te tonen hoe e.e.a. in de klas gedaan kan worden. De navolgende bespreking voor docenten neemt grotere stappen.

In mijn boek COTP uit 2011 [5] koos ik voor de omgekeerde benadering (p39), die uitgaat van verhoudingen van zijden en vervolgens integreert tot oppervlakte.

(a) Het uitgangspunt is hier *Figuur 2*, waarin het in essentie om polygonen gaat, zodat het vierkant dus maar een voorbeeld is. Driehoek *OAB* is gelijkvormig aan *OCD,* zodat *OA* : *OC* = *AB* : *CD.* Deze gelijkvormigheid en proportionaliteit blijven gelden naarmate we steeds fijnere polygonen nemen, zeshoeken, honderdhoeken, enzovoorts, zodat in de limiet de cirkel zelf ontstaat. Een eerste gevolg is dat de proportionaliteit nu beter te zien is dan in paragraaf 3 hierboven. Een tweede gevolg is dat *OA* tot r_1 en *OC* to r_2 naderen. Dit is eventueel nog beter te zien door de polygonen niet buiten maar binnenin de cirkels te tekenen, maar we sluiten nu aan bij *Figuur 1*. Bijgevolg leidt het meetkundig inzicht tot de constatering dat $C[r] = \Theta\, r$ voor een of andere proportionele factor Θ. De eenheidscirkel ontstaat met $r = 1$ en daarvan is de omtrek Θ.

[5] Thomas Colignatus (2011), “Conquest of the Plane”, via American Book Center. PDF op http://thomascool.eu/Papers/COTP/Index.html

Figuur 2: Cirkels met polygonen (bijv. een vierkant)



(b) De oppervlakte. Voor een driehoek is de oppervlakte ½ *basis* maal *hoogte*. De driehoeken in de limiet van de polygonen hebben hoogte *r* en de totale basis van alle driehoeken is gelijk aan de omtrek Θ *r*. Dus $S[r]$ = ½ (Θ *r*) *r* = ½ Θ r^2.

In de aanpak (a) en (b) sluit Θ = 2 π mooi aan op het aantal draaien of slagen rondom de cirkel (Engels *turns*). Een ½ (halve) slag geeft Θ / 2 radialen, een ¼ (kwart) slag geeft Θ / 4 radialen. Naast de eenheidscirkel met *r* = 1 is er ook de cirkel met *r* = 1 / Θ en dus omtrek 1, alwaar het aantal draaien kan worden uitgezet. Deze cirkel kan de “hoekcirkel” of “eenheidsomtrekcirkel” (“angular circle” of ook de “unit circumference circle”) worden genoemd, zie COTP, ook voor voorbeelden van strakkere berekeningen zonder de overlast van 2π.

PM. Voor het differentiëren hierboven is de traditionele limiet opgeschreven terwijl EWS en COTP een gemakkelijker algebraïsch alternatief presenteren. [6]

Conclusie

Paragrafen 1 t/m 5 geven de leerling inzicht in de cirkel. Voor de oppervlakte π r^2 is er het geheugensteuntje van het vierkant met ook 3 < π < 4. Vervolgens is er de formele afleiding voor het verband met de omtrek 2 π *r.*

Theoretisch is echter Θ = 2 π de relevante parameter voor het aantal draaien of slagen rondom de cirkel. Er is inderdaad ook didactiek beschikbaar om eerst de omtrek te bepalen en daarna te integreren tot oppervlakte. Het inzicht dat 3 < Θ / 2 < 4 is inzicht en niet langer alleen een geheugensteuntje. De aanpak via paragraaf 6 (a) en (b) lijkt te prefereren.

Maar vele wegen leiden naar Rome. Bovenstaande paragrafen 1 t/m 5 kunnen een welkome variatie zijn. Vanzelfsprekend hoeft Θ niet dogmatisch in alle denkstappen gebruikt te worden. Voor de afleiding in paragrafen 1 t/m 5 van het verband tussen oppervlakte en omtrek van een cirkel heeft π = Θ / 2 inderdaad een zinvolle rol. In het proces waarin het onderwijs bezig is met het bepalen van de omvang van hoeken en slagen rond de cirkel blijft het aanvaardbaar dat er minstens twee momenten zijn waarop π een handige notatie blijkt voor een tussenstap.

Het zou denkelijk wel onjuist zijn om deze momenten doorslaggevend te laten blijven voor de didactische keuze in zijn algemeenheid. Historisch is π tot ontwikkeling gekomen in een statische context met meting van omtrek en oppervlakte, terwijl pas later de dynamiek van het ronddraaiend wiel en de machine in focus kwam. Het zou mooi zijn om deze focus ook via het gebruik van Θ = 2π te laten doordringen.

[6] Zie workshop D5 op de NVvW jaardag 2013, https://www.nvvw.nl/16820/jaarvergaderingen