

Re-engineering van wiskunde en onderwijs daarin

Thomas Colignatus ¹
25 juni 2012
<http://boycottholland.wordpress.com/>

Inleiding

Dit verhaal begint met een probleem in de econometrie. Vervolgens komen we bij wiskunde en onderwijs in wiskunde. Een kernvraag blijkt te zijn of wiskundigen wel wiskunde kunnen. Re-engineering blijkt wenselijk. De definitie verschaft door een universitaire bul en het elkander op congressen bemoedigend op de schouders slaan blijkt onvoldoende te zijn. Maar er gloort hoop wanneer wiskundigen gebruik gaan maken van “definitie, stelling, bewijs”. Nadenken is wat anders, maar het is een begin. Omdat dit artikel bedoeld is voor een tijdschrift van wiskundigen leg ik eerst een basis in de wiskunde, bespreek ik daarna het oorspronkelijk probleem in de econometrie, en sluit ik weer af met de wiskunde.

Wiskunde en onderwijs

Aan de universiteit in Groningen hadden wij econometristen onze colleges wiskunde samen met de studenten wis-, natuur- en sterrekunde. Na een diploma econometrie in Groningen 1982 heb ik nog een didactische aantekening wiskunde gekregen aan de universiteit in Leiden 2008. Mijn boek over de didactiek van wiskunde heeft onlangs twee gunstige recensies gekregen. ² Overigens schreef ik als student in 1981 ook een boek over logica, dat ik in 2007 heb geprogrammeerd in Mathematica, waarvoor ook twee gunstige recensies zijn. ³ Hopelijk accepteert de lezer dat ik iets van wiskunde snap, ook al is het niet veel, en ook al kan het lijken of ik wonderlijke uitspraken doe.

Als docent wiskunde heb ik alleen bekwame en prettige collegae ontmoet. Er is een eindexamen waaraan gewerkt wordt en er is de oprechte poging leerlingen ook wiskunde bij te brengen. Als ik al kritiek zou hebben, dan niet daarop. Mij gaat het nu om de andere kant, de feitelijke constatering dat het fundamenteel en structureel fout gaat. Hierover heb ik niet met deze collegae gesproken. In de gesprekken op de werkvloer gaat het over het bestaande programma en niet over het sleutelen aan nieuwe dingen die je de leerlingen toch niet toont omdat het vooralsnog alleen maar verwarrend voor ze zou kunnen zijn. Voor mijn gedachten over hoe het beter kan heb ik zo eigenlijk geen contacten en ben ik aangewezen op het schrijven van een artikel of een boek. Lezers daarvan kennen mij standaard niet. Klaarblijkelijk kan dat tot misverstanden leiden die bijvoorbeeld ook snel opgelost hadden kunnen zijn in een gesprekje bij de koffieautomaat.

Er is een groot probleem in het onderwijs in wiskunde. Wiskundigen worden opgeleid voor abstracte theorie. Komen zij voor de klas te staan dan zien zij daar reëel bestaande leerlingen. Oei. Een pijnlijk besef: wiskundigen hebben niet de empirische instelling die voor onderwijs nodig is. In een lerarenopleiding wordt weliswaar in de klas geoefend maar blijkbaar is het daarvoor reeds misgegaan, in de poging wiskundige te worden. Wiskundigen lossen dit op door vast te houden aan een bepaalde traditie. Doe het maar zoals het altijd gedaan is, dan werkt het een beetje, denken ze dan. Wanneer de leerling het niet snapt, is het de schuld van die leerling zelf. En zo gaat het al eeuwen.

Ik overdrijf een beetje. Wiskundigen veranderen wel eens iets. Hans Freudenthal verzong de “realistische wiskunde”. Hier was dus een theoreticus met het hoofd in de wolken die meende een beeld van de werkelijkheid te hebben. Freudenthal had een beetje gelijk want het traditionele onderwijs in wiskunde was nogal erg on-didactisch met “definitie, stelling, bewijs”. In de uitdaging

¹ Econometrist en leraar wiskunde. Artikel aangeboden aan NAW en niet geplaatst.

² <http://www.euro-math-soc.eu/node/2081> en <http://www.math.leidenuniv.nl/~gill/reviewCOTP.html>

³ <http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2008-09-3-217.pdf> en <http://www.euro-math-soc.eu/node/2494>

van de Sputnik was het een noodsprong dan iets anders te proberen, in de richting van toegepaste wiskunde.

Maar empirisch onderbouwd was het niet. Recentelijk constateert Ben Wilbrink:⁴ “ik heb geen serieus empirisch toetsend onderzoek door de wiskobas-groep kunnen vinden, dus geen onderzoek op basis waarvan Hans Freudenthal terecht zijn claim kon doen. En dit is niet de enige claim die de wiskobas-groep heeft gedaan.” Ben Wilbrink snapt daarbij nog niet hoe erg het écht is. Ik kom hieronder op terug.

Laten we eerst de fout van Freudenthal oplossen. In het artikel “Benoemde lijnen” en in de didactische aanpak in “Conquest of the Plane” ontwikkel ik de volgende hypothese.⁵ De kern van wiskunde blijft abstractie. Dat is wat wiskunde is. Dat kun je niet vervangen met kleien en fröbelen. Wanneer je een driehoek in het zand tekent dan zijn er twee mogelijke situaties. (a) Ofwel je ziet alleen die krabbels in het zand. Dat doet wellicht een schaaap. (b) Ofwel je geest ziet ook de abstractie van een driehoek. Daartoe zijn veel mensen in staat.⁶ Freudenthal onderkent die abstracte basis niet op een goede manier. Hij poneert het als een latere fase maar hij verwacht dit dan met de formele ontwikkeling van de abstractie. De traditionele visie om van abstractie uit te gaan was in aanleg juist. Maar daar werd weer de fout gemaakt door het nulde Van Hiele niveau te verwaarlozen. Traditioneel met Euclides begon men met de formele ontwikkeling. Dit is didactisch twijfelachtig hoewel het wel 2300 jaar wiskunde heeft opgeleverd. De fout daar is, lijkt me, dat je begint met een leeg vlak. Dan heeft een leerling geen enkel houvast. Punt, lijn en vlak (R^0 , R^1 , R^2) geven onvoldoende ankers. Terwijl Pierre van Hiele terecht leert dat je materiaal nodig hebt om geestelijke ankers te leggen. Mijn voorstel tot oplossing is eerst het vlak te bevolken met lijnen en deze een naam te geven. Horizontalen, verticalen, diagonalen, met namen en nummers, zoals je bij een nieuwe stad ook een plattegrond met straatnamen krijgt. De lijnen blijven abstract en hebben abstracte eigenschappen, maar alles is wel benoembaar. Zie aangehaalde boeken hoe je vandaaruit verder kunt werken. Of het in de praktijk echt de oplossing blijkt te zijn, zullen alleen experimenten kunnen aantonen, maar daarvoor zou het parlement dan middelen beschikbaar kunnen stellen.

Het is ietwat pijnlijk dat de schoolstrijd tussen “realisten” en “traditionelen” teruggebracht lijkt te kunnen worden (het is nog niet empirisch vastgesteld) tot zo’n misverstand en eigenlijk ook gebrek aan nadenken. Maar de diepere oorzaak lijkt me een blindheid voor de realiteit van de leerling. Het is niet alleen een zich niet kunnen verplaatsen in het denken en de behoeften van de pupil, maar het is vooral het ontbreken van de terugkoppeling oftewel de empirische cyclus die ontstaat tussen gedachten over die pupil en de waarnemingen ten aanzien van die pupil. Wanneer de wiskundige niet ziet wat leerlingen doen dan zit hij gevangen in de theoretische cyclus van de eigen waandenkbeelden.

Ik zet dit misschien wat stevig neer maar het lijkt me belangrijk om de juiste conclusie te trekken. Tot 1850 kon je wellicht nog denken dat wiskunde en het onderwijs daarin vrije zaken waren, waarin ieder kon bepalen of hij of zij zich liet overtuigen of niet. Of je onderwijs gaf in graden of radialen, dat kon de huisleraar ook zelf wel bepalen. Deze filosofie van vrijheid-blijheid is nog dominant in het denken van wiskundigen. De werkelijkheid is, helaas, weer anders. Wiskunde en onderwijs daarin zijn een bedrijfstak geworden, gereguleerd door de overheid, met commerciële belangen, vakbonden, en ouders die hun kinderen in Japan van ‘s ochtends vroeg tot ‘s avonds laat drillen tot alleen zelfmoord uitweg biedt.

Een mogelijkheid is bijv. die didactiek van de benoemde lijnen in een leerboekje te laten opnemen, en dan maar zien of het onderwijs beter wordt of niet. Dit lijkt me een onjuist denkmodel. Dan probeer je een fundamenteel verkeerde situatie met pleisterwerk op te lappen. Juister lijkt me dat de maatschappij de fundamentele conclusie trekt dat onderwijs een empirische zaak is en dat dus ook leraren wiskunde een empirische opleiding krijgen. Eerst wiskundigen opleiden en daarna didactisch aantekenen, nee, dat is onjuist. Bij mij ging het goed omdat ik met econometrie sowieso een empirisch fundament heb. Het lijkt me onjuist wanneer wiskundigen

⁴ <http://beteronderwijsnederland.net/node/7485>

⁵ <http://thomascool.eu/Papers/COTP/Index.html> en <http://thomascool.eu/Papers/AardigeGetallen/Index.html>

⁶ <http://thomascool.eu/Papers/Math/2011-07-11-COTP-Damasio.pdf>

zouden beweren dat een empirische opleiding tot leraar wiskunde nooit de gewenste abstractie van wiskundig denken zou opleveren. Tot op heden gaat het met de lerarenopleidingen en de traditionelen en Freudenthal dus verkeerd. De opleiding moet anders, en wat nu als “wiskunde” wordt verkocht kan flink herschreven worden.

In 2009 zocht ik, met het boek “Elegance with Substance” op zak, contact met het Freudenthal Instituut met het voorstel tot presentatie en discussie. Er was interesse en een suggestie tot samenwerking, maar ook met een verbonden voorstel dat ik mijn advies tot een parlementair onderzoek zou temporiseren. Dat kan natuurlijk niet. Je kunt geen wetenschappelijke analyse temporiseren. Het lijkt me bovendien ook dat je toch eerst de analyse moet bestuderen en mij een gelegenheid zou kunnen geven tot presenteren en discussie, voordat je de conclusie kunt verwerpen dat een parlementair onderzoek zinvol zou zijn. Het FI heeft een punt dat men niet regulier over zulke adviezen gaat, en regulier vooral over hoe je $a + b$ onderwijst, maar je mag van volwassenen ook verwachten dat ze kunnen nadenken, en kunnen gaan zien dat aderslaten niet altijd een effectieve geneesmethode is.

Hoe erg het is ? Héél erg

Een voorbeeld. Voor “twee en een half” is de officiële schrijfwijze $2\frac{1}{2}$. Voor “twee maal A” is de schrijfwijze $2A$. Bijvoorbeeld $2\sqrt{2}$. De schrijfwijze $2\frac{1}{2}$ is dus als “twee maal een half”. Wanneer je alleen maar typt is het nog wel te leren. Maar met de hand geschreven kan het fout gaan en kan een leerling plots denken $2\frac{1}{2} = 1$. Ik heb het onder mijn ogen zien gebeuren.

Er zit veel onderwijstijd, bloed, zweet en tranen in aanleren bij leerlingen dat $2\frac{1}{2}$ eerst “en” is en vervolgens dit weer een beetje afleren omdat $2A$ “maal” is. Waarom ? Alleen omdat het traditie is. Je kunt ook gewoon $2 + \frac{1}{2}$ schrijven voor “twee en een half”, dan staat die “en” er ook precies. Vanuit didactisch oogpunt is dat ook logischer omdat het beter aansluit bij algebra. Voor het afsluiten van een som kun je dan “Kan Niet Eenvoudiger” (KNE) of gewoon FIN gebruiken, zodat $1 + 6 / 4 = 2 + 2 / 4$ FIN fout is omdat het $2 + \frac{1}{2}$ FIN moet zijn. (De notatie $2\frac{1}{2}$ wordt nu ook gebruikt om aan te geven dat een som is afgemaakt maar dat is misbruik.)

Het is ook een belangrijk wiskundig inzicht dat een symbool zowel passieve als actieve betekenissen kan hebben. Bijvoorbeeld bij $\sqrt{2}$ kun je de rekenmachine pakken om actief de decimalen te bepalen, maar je kunt het ook passief laten staan om daarmee exact door te rekenen. Dat kan ook bij het plusteken.

De notatie van breuken toont dus hoe wiskundigen hechten aan traditie en geen zicht hebben op de empirische onderwijssituatie. In wezen doen ze afbreuk aan de wiskunde zelf. Het is een voorbeeld van een veel en veel langere lijst. ⁷ De verkeerde “wiskunde” wordt nu tegen hoge kosten in allerlei computerprogramma’s ingeprogrammeerd en Nederland heeft een hele kerstboom opgetuigd om kinderen “beter te laten rekenen”. Er is dus iets ernstig mis. Laat het parlement ingrijpen (of kies er een dat wel functioneert). ⁸

Wanneer je wiskundigen hiervan vertelt, krijg je glazige gezichten en sommigen gaan schelden. ⁹

Een ander voorbeeld. De wiskundigen hebben zich verenigd in het Platform Wiskunde Nederland (PWN). Er is een publiciteitscommissie ¹⁰ waar het nodige geld in gaat zitten. Dus: men heeft vanaf de kleuterschool tot het eindexamen ontvankelijke kinderen beschikbaar om de schoonheid van wiskunde te laten zien, die kans wordt verknald, veel leerlingen gaan wiskunde haten, en vervolgens moet dit met in commissie vastgestelde publiciteit hersteld worden ...

Directeur Wil Schilders van PWN schrijft: “In het afgelopen jaar is gebleken dat het lastig is om ‘out of the box’ te denken, derhalve zullen hiervoor nieuwe stimulansen worden gegeven. Er zal

⁷ <http://thomascool.eu/Papers/Math/Index.html> en <http://thomascool.eu/Papers/AardigeGetallen/Index.html>

⁸ Ik heb er inmiddels met professor Schilders over gesproken en ik begrijp dat het allemaal niet zo bedoeld is. Er blijft een verschil in analyse en inzicht.

⁹ <http://thomascool.eu/Papers/Math/2010-12-Euclides-86-3-p130-131-a.jpg> en

<http://thomascool.eu/Papers/COTP/2012-02-13-Colignatus-reactie-op-Euclides-87-4-p168-170.html>

¹⁰ <http://www.platformwiskunde.nl/publiciteit.htm>

hier veel ruimte en aandacht aan worden gegeven, iedere commissie zal nadrukkelijk worden gevraagd nieuwe ideeën aan te dragen. Zulke initiatieven zijn van groot belang voor het welslagen van de missie van PWN.” (*Euclides*, december 2011, pagina 127; als ook *Nieuw Archief voor Wiskunde*, december 2011, p289¹¹)

Dit is een grove onwaarheid en de wiskunde onwaardig. Ik heb PWN, de commissie voor het onderwijs en ook professor Schilders zelf wel degelijk op de hoogte gesteld van mijn boeken over het onderwijs in wiskunde en mijn advies sinds 2008 tot een parlementair onderzoek. Er is allang *out of the box* gedacht, er moet nu eens geluisterd gaan worden. Inmiddels heeft Wil me te kennen gegeven dat hij het niet zó bedoeld heeft dat mijn persoon genegeerd mag worden. Toch is de laster in *Euclides* nog niet ongedaan gemaakt.

Waar ik spreek over geestelijke mishandeling in het onderwijs in wiskunde, is het onjuist dat als literaire overdrijving te beschouwen want het is wel degelijk bedoeld als een empirische constatering. (A) Iemand constateert bijvoorbeeld hier:¹² “Bovendien is er een grote groep studenten die bij $a^2 + b^2 = c^2$ al rode vlekken in hun nek krijgt.” (B) Momenteel wordt het succes van het onderwijs in wiskunde gemeten als de *performance* van leerlingen, uitgaande van de onjuiste gedachte dat de onderliggende wiskunde goed is, met een instrument als PISA.¹³ Juister zou het zijn om daar een statistische indicator naast te zetten voor de veroorzaakte overmatige stress, vergelijkbaar aan de instrumenten als van de Onderwijszorg Nederland¹⁴ of de Stichting Benchmark GGZ.¹⁵ Voor dierenwelzijn¹⁶ is er al statistisch onderzoek maar huilende kinderen hebben hun onvoldoende zelf verdiend en krijgen een zakdoek, zo is althans het huidige rare gedachtenpatroon.

Dit was wiskunde. Nu naar het oorspronkelijke probleem in de econometrie.

Econometrisch probleem

Op onze planeet zijn er ongeveer een miljard behoeftigen die op de rand van de dood door honger en uitering leven. Het zijn concentratiekampen waarbij het prikkeldraad is vervangen door geografische afstand, woestijnen en zeeën. Na WO II hebben we met elkander afgesproken dat we dit nooit meer zouden toestaan. We hebben allerlei psychologische mechanismen om dit te vergeten. Wat in arme landen gebeurt willen sommigen niet vergelijken met het moedwillig opsluiten van mensen door de nazis, maar wil je werkelijk op deze manier wegstijgen? Want het uiteindelijke effect blijven honger en uitering, waar het toch óók om ging, en niet alleen dat moedwillig opsluiten? Juristen kunnen hun wegstijgen zelfs schagen met mooie clausules die ze dan internationaal recht noemen. Kernpunt blijft echter dat het een *feit* is dat er massaal menselijk lijden bestaat, dat we iets op de planeet verkeerd organiseren, en dat we blijkbaar niet scherp genoeg nadenken, zodat we psychologisch wegduiken voor de morele verantwoordelijkheid die er wel degelijk is.

Je bent niet gehouden aan het onmogelijke, maar wanneer je weet dat het mogelijk is dan is de verantwoordelijkheid duidelijk. Wie niet wil weten wat er mogelijk is, moet dus niet verder lezen.

Het probleem van de armoede en het lijden is econometrisch gedefinieerd en opgelost in DRGTPE.¹⁷ Daarin staat ook een definitie, stelling en bewijs op de herleide vorm van een econometrisch model. Alleen de definitievergelijkingen worden gebruikt maar alles blijft empirisch omdat het model over de werkelijkheid gaat. (Zie elders in dat boek voor de gedragsvergelijkingen.)

¹¹ <http://www.nieuwarchief.nl/serie5/deel012/dec2011/nawdec286.pdf>

¹² <http://beteronderwijsnederland.net/node/7330>

¹³ <http://www.oecd.org/dataoecd/58/41/33917867.pdf>

¹⁴ <http://onderwijszorgnederland.nl/>

¹⁵ <http://www.sbggz.nl/>

¹⁶ http://www.nwo.nl/nwohome.nsf/pages/NWOA_7CFDSR

¹⁷ <http://thomascool.eu/Papers/Drgtpe/Index.html>

Kernpunt is dat ieder land is gebaat bij een democratie met een Economisch Hof dat toeziet op het correct gebruik van informatie. Volledige werkgelegenheid kan bestaan, en armoede kan worden tegengegaan, met een doodgewone verzorgingsstaat. Bij correct gebruik van informatie kan ieder werk vinden. Dat mensen werken is altijd goedkoper dan dat mensen werkloos zijn. Mensen niet laten werken is onnodig duur. Wat we in Nederland doen is de verzorgingsstaat in bureaucratie laten verzanden, en we kopen de onvrede af met een aardgasbel en een loonmatigingsbeleid. Het grootste probleem ligt bij het Centraal Planbureau (CPB) dat cruciale informatie vernietigt.

Een probleem is dat de directie van het CPB bespreking van de analyse tegenhoudt en mijn persoon is gaan zwartmaken. Ik werkte daar in 1982-1991 en in 1990 kwam men er achter dat ik wegens gedrag niet te handhaven zou zijn terwijl de werkelijke reden is dat de directie inbreuk pleegt op de integriteit van de wetenschap. Zie de brief van de directie (Hans den Hartog, Peter van den Berg): dat men iets niet begrijpt en daarom bespreking tegenhoudt, terwijl je, dunkt me, zo'n gesprek aangaat om te zien of je het kunt gaan begrijpen.¹⁸ De analyse was overigens oorspronkelijk gericht op werkloosheid en armoede in Nederland, zodat de analyse voor het CPB relevant was, want de analyse toont ook fouten in de modellen die ik zelf heb helpen maken.¹⁹

Diezelfde analyse is echter ook relevant voor de concentratiekampen op de wereld. Vanzelfsprekend zijn vele landen geen democratie. Echter, wanneer Nederland het goede voorbeeld geeft dan is er meer zicht op navolging. Geeft Nederland niet het goede voorbeeld dan hebben ook mensen in dictaturen wellicht weinig lust om in bureaucratie zoals in Nederland verzeild te raken, met name wanneer zij geen aardgasbel hebben om onlustgevoelens af te kopen.

De moreel juiste weg voor oplossing van honger en ziekte van een miljard mensen op deze planeet is derhalve dat Nederland de censuur van de wetenschap door de directie van het CPB oplost en het goede voorbeeld van een democratie met een Economisch Hof gaat geven.

Hoogleraren economie hebben echter geen boodschap aan de notie van integriteit van wetenschap, en mijn advies is derhalve hen allen te ontslaan.²⁰

Kort over de interactie

Na het onheuse ontslag door de directie van het CPB heb ik een zwervend bestaan, met verschillende korte banen. Een mogelijkheid was leraar wiskunde worden. Didactisch is wiskunde mij liever dan economie. De keuze is niet vreemd, ook gezien dat ik als student ook al over logica en methodologie schreef. De creativiteit staat niet stil en als empirisch wetenschapper kijk ik blijkaar iets verder dan pure wiskundigen. Vervolgens ontdek je weer een en ander. En dan begint weer zo'n circus: de boodschap is onwelgevallig maar je kunt de boodschapper pakken. Wat vreselijk jammer is, is dat mooie inzichten plotseling belast worden met het gescheld en gemanipuleer door anderen, en nu wiskundigen. Ik weet geen betere oplossing dan netjes verslag doen van wat er gebeurt.

Wiskundigen hebben zo ook een rol gespeeld bij het ontstaan van de crisis in economie en democratie. Eerder al bij mijn analyse over democratie en stemprocedures (1990, 2001).²¹ Recentelijk in 2008 bij mijn advies tot een parlementair onderzoek naar het onderwijs in wiskunde. Ze hadden een beschermende rol kunnen spelen bij de ontsporing door de directie van het CPB. Indien wiskundigen hadden erkend dat mijn wiskunde en didactiek kwaliteit hebben dan hadden publiek en collegae econometrie met meer interesse gekeken naar mijn werk op aldaar. Niets daarvan. Wiskundigen bij "Beter Onderwijs Nederland" gebruikten zelfs het onheuse ontslag bij het CPB om te stellen dat mijn werk pseudo-wetenschap zou zijn, alsof zij over

¹⁸ <http://thomascool.eu/SvHG/DenS/Index.html>

¹⁹ <http://thomascool.eu/Thomas/Nederlands/TPnCPB/TPnCPB.html>

²⁰ <http://thomascool.eu/SvHG/DenS/Index.html>

²¹ <http://thomascool.eu/Thomas/English/Science/Letters/SCT-working-group.html>

econometrie konden oordelen, en terwijl zij mijn didactiek t.a.v. de goniometrie in het belachelijke trokken.²² Wiskundigen blijken een eigen probleem te vormen.

De reis van econometrie naar logica en wiskunde heeft zo ook wel weer tot nieuwe inzichten geleid. Mooie wiskunde, maar het gedrag van mensen blijft problematisch.

Hoe verder ?

Kees Roos verhaalt dat de KWG een prijsvraag uitschreef of iemand axioma's kon maken voor Brouwer's verwerping van *tertium non datur*.²³ Heyting's axioma's staan tot de dag van vandaag, ook al werpt mijn *A Logic of Exceptions* wel weer wat ander licht op. Hoe dan ook, er liggen nu boeken van me met allerlei logica en wiskunde, en een mogelijkheid voor wiskundigen om e.e.a. te gaan begrijpen zou natuurlijk kunnen zijn om het in axiomatiek te gieten. Men kan ook gaan nadenken, maar dat kan te moeilijk zijn.

²² <http://thomascool.eu/Thomas/Nederlands/Wetenschap/Brieven/2009-02-19-BON-Gedoe.pdf>

²³ <http://www.isa.ewi.tudelft.nl/~roos/Afscheidsrede.pdf>