De afgeleide is algebra

10 november 2008

Op de NVvW Studiedag 2008 presenteerden Joke Daemen en Gerrit Roorda een sessie over de afgeleide, bedoeld voor een *Handboek Vakdidactiek Wiskunde*. De bijeenkomst was voor auteur dezes ook een aardige gelegenheid om enkele aanwezigen attent te maken op niet alleen mijn boek *A logic of exceptions* (ALOE) en de bespreking daarvan door Richard Gill in Nieuw Archief voor Wiskunde, september 2008, maar met name paragraaf 11.5 daarin, waarin de afgeleide wordt geplaatst in de context van de logische paradoxen die ontstaan bij het delen door nul. Zie mijn website voor de PDF. In mijn ogen heeft vooral Fermat de basis gelegd voor de afgeleide en zijn Newton en Leibniz afgedwaald in een verkeerde denkrichting. In ieder geval is de bespreking van Daemen en Roorda voor auteur dezes al een opsteker. Zij leggen uit dat de leerlingen er nogal wat moeite mee hebben om van discrete veranderingen naar infinitesimalen te gaan, en dat dit de didactiek erg bemoeilijkt. Nu, de leerlingen hebben gelijk, want infinitesimalen en het limietbegrip en ook de aanpak van Karl Weierstraß zijn op de middelbare school logisch gezien onnodig en verwarrend, als het al geen waanzin is.

Een infinitesimaal is op magische wijze zowel niet-nul voor deling als nul na deling. Ook bij $y = x / x$ zegt de leraar wel dat dit niet gedefinieerd is voor $x = 0$ maar alleen in de limiet $x \to 0$, maar eigenlijk zijn we toch geïnteresseerd in de waarde bij $x = 0$ en de natuurlijke neiging is toch zo'n waarde 1 gewoon te nemen. Wie zegt dat hij het begrijpt bedoelt eigenlijk dat hij het niet begrijpt maar jarenlang is geïndoctrineerd om te denken dat hij het begrijpt.

Een juiste aanpak lijkt me de volgende. Een onderscheid kan gemaakt worden tussen getallen en algebra met variabelen die getallen als waarde kunnen hebben. We kunnen ook onderscheid maken tussen een breuk als passief resultaat en een deling als actief proces. Dit is het verschil tussen een zelfstandig naamwoord en een werkwoord. Een wiskundige zal geneigd zijn y / x te beschouwen als een passief resultaat, dus laten we nu $y // x$ opvatten als het actieve proces of de procedure: {neem aan dat $x \neq 0$, vereenvoudig de uitdrukking y / x, verklaar het resultaat ook geldig voor $x = 0$ waarbij het domein uitgebreid wordt}. Deze definitie geldt voor variabelen zodat $x // x = 1$ maar voor getallen blijft gelden dat $4 // 0 = 4 / 0$ = niet gedefinieerd. De afgeleide wordt dan gedefinieerd met het programma:

$$f'[x] = \mathbf{d}f / \mathbf{d}x \equiv \{\Delta f // \Delta x, \text{ kies daarna } \Delta x = 0\}$$

waarin eerst het domein van Δx wordt uitbreid met 0 en vervolgens daartoe beperkt. De definitie lijkt adequaat te beschrijven wat wiskundigen feitelijk doen maar de rare praat over 'infinitesimalen' die 'naar nul verdwijnen' wordt vermeden. Ook het limietbegrip valt weg want het gaat niet om de omgeving maar het gaat precies om de waarde op dat ene punt.

Het eigenlijke probleem is te laten zien waarom de definitie van de afgeleide zinvol is. Gangbaar wordt het probleem opgebouwd vanuit raaklijnen en komt daarna pas de integraal aan de orde. Deze invalshoek ontstaat misschien bij natuurkundigen die aan snelheden gaan denken. Formeel logischer is te vertrekken vanuit de integraal. Bij de integraal is het uitgangspunt een vermenigvuldiging en geen deling. Laat $f[x]$ een bekende functie zijn die het oppervlak tot x onder een onbekende $y = g[x]$ beschrijft. Dan geldt $\Delta f = y\ \Delta x + \mathrm{E}[\Delta x]$ voor een error functie wanneer $\Delta x \neq 0$, en deze relatie kan zijn vorm behouden wanneer ook $\Delta x = 0$ en y met de waarde op die plek. Het argument zit in het algebraïsch vormbehoud. Vervolgens is die y te vinden met bovenstaande afgeleide. Ik verwijs voor een verdere toelichting naar ALOE p236.

In het Europa anno 1200 leverde de komst van de nul zoveel problemen bij het delen op dat er een taboe daarop ontstond. Iets later op de historische tijdlijn bleek het ‘differentiaalquotient’ van belang, maar dreigde tot een schending van dat taboe. In plaats van het begrip ‘deling’ te heroverwegen kozen Newton, Leibniz en Weierstraß voor omweggetjes. Hiermee hebben ze de zaak gecompliceerd en nieuwe paradoxen veroorzaakt. Bijvoorbeeld: terwijl je de limiet naar nul neemt en nooit in nul komt is de limiet wel geldig voor nul ? Enfin, logische helderheid en correctheid kunnen hersteld worden met een goed algebraïsch onderscheid tussen het delen als proces en de breuk als resultaat.

PM 2012. Zie dus ALOE p236. Deze toelichting is ook opgenomen in EWS en verder uitgewerkt in COTP.