L.E.J. Brouwer begreep de Uitgesloten Derde niet

Thomas Colignatus
Scheveningen, 13 juni & 1 september 2014
http://thomascool.eu/

Aangeboden aan NAW - De Derde Weg

Het onderstaande is een reactie op Mark van Atten & Göran Sundholm n.a.v. de 80e verjaardag van Dirk van Dalen in het NAW-juninummer van 2014

Van Atten & Sundolm (2014) stellen: "Brouwer maakte [in zijn dissertatie] nog geen bezwaar dat ligt aan de kant van de logica. Maar dat komt alleen omdat hij toen de uitgesloten derde nog verkeerd begreep, als “niet-*A* impliceert niet-*A*” (...). Dirk van Dalen heeft laten zien hoe deze foutieve lezing teruggaat op Brouwers leraar logica, Bellaar Spruyt. (...) Een jaar later leest Brouwer het principe correct als “*A* is bewijsbaar, of niet-*A* is bewijsbaar” (...). Het artikel over de onbetrouwbaarheid is dus in twee opzichten een stap vooruit vergeleken bij de dissertatie: Brouwer corrigeert zijn lezing van de uitgesloten derde, en daarmee is hij dan in staat te laten zien dat ook in de wiskunde zelf een traditioneel logisch principe onbetrouwbaar is."

Deze terminologie is verwarrend en die verwarring begon al bij Brouwer zelf. Het lijkt me dat Brouwer het nooit echt begrepen heeft. Er is onderscheid tussen "waarheid" en "bewijsbaarheid". Waarheid heeft betrekking op het modeleren van de werkelijkheid, waarvoor de aanname is dat zaken voorkomen of niet voorkomen. Bewijswaarheid geldt voor betrekkingen binnen het model. Je kunt niet zomaar het ene voor het andere vervangen. Omdat Brouwer dit toch doet schept hij verwarring. Vervolgens ontstaan allerlei mystificerende verhalen alsof het bijzonder is maar het lijkt me eerder onhandig.

Helderheid ontstaat bij de volgende definities. Op het meta-niveau van het manipuleren van symbolen en formules staat '≡' voor definitie en '=' voor identiteit. Bijv. is $A = B$ op meta-niveau zo te lezen dat je het ene of het andere mag gebruiken. Binnen het model staat p voor een stelling, ($\neg \equiv$ niet), ($\vee \equiv$ of), ($\rightarrow \equiv$ impliceert), ($\leftrightarrow \equiv$ equivalent), en ($B \equiv$ bewijsbaar). Beslisbaarheid ("decidable") is: $Dp \equiv Bp \vee B(\neg p)$. Onbeslisbaarheid is: $Up \equiv \neg Dp = (\neg Bp \;\&\; \neg B(\neg p))$. Dan is krijgen we:

> $(p \vee \neg p) = (\neg p \rightarrow \neg p)$ voor het Principe van de Uitgesloten Derde = PUD
>
> $(Dp \vee Up) = (Bp \vee B(\neg p) \vee Up)$ voor PUD toegepast op bewijsbaarheid
>
> $Dp = (Bp \vee B(\neg p))$ d.w.z. wat L.E.J. Brouwer verwierp = WBV
>
> $(g \equiv \neg Bg)$ met g de Gödeliar, d.w.z. Gödel's variant op de leugenaarsparadox

Het pedante van Brouwer zit erin dat hij "waarheid" zoals bedoeld voor de afbeelding van model naar werkelijkheid vervangt door "bewijsbaarheid", want hij is als wiskundige boven de logica verheven. Bij zo'n specifiek gekozen substitutie van "waar" in PUD met "bewijsbaar" (zie bovenaangehaald citaat) krijg je inderdaad WBV, en moet je dit inderdaad verwerpen. Hierbij schept Brouwer natuurlijk zijn eigen probleem, met als dieperliggende oorzaak zijn pedantie en niet een diepzinniger inzicht in logica en wiskunde. Een excuus voor Brouwer is dat de notie van bewijsbaarheid in zijn tijd nog in ontwikkeling was, terwijl je ook anno 2014 nog een filosofische boom kunt opzetten over de vraag of "wiskundige waarheid" toch niet neerkomt op "bewijsbaarheid uit axioma's". Maar van dik hout zaagt men planken.

De auteurs alsook Van Dalen beschrijven dus correct wat Brouwer verwierp, maar wat hij verwierp was niet PUD, maar slechts zijn misvatting van wat PUD zou zijn.

Dat Brouwer PUD eerst formuleerde als ($\neg p \rightarrow \neg p$) en pas later als ($p \vee \neg p$) lijkt inderdaad aannemelijk, zodat we kunnen aannemen dat Brouwer wist dat ($p \vee \neg p$) = ($\neg p \rightarrow \neg p$) voor de normale tweewaardige logica. Maar merk op dat Brouwer wel uitging van ($Dp \vee Up$) = ($Dp \vee \neg Dp$), dus hier PUD wel accepteerde. Maar bij wie in de war is blijft het lastig te zien wat wel begrepen is. In ieder geval is verwerpen van Dp = ($Bp \vee B(\neg p)$) als wiskundig axioma geen adequate verwerping van ($p \vee \neg p$) = ($\neg p \rightarrow \neg p$) voor normale tweewaardige logica. Het discussiedomein is hier niet zozeer logica maar methodologie dat het in de abstracte wiskunde vooral gaat om bewijsbaarheid en niet om die waarheid uit de toegepaste wiskunde.

Men kan stellen: "Er is geen tegenstelling tussen waarheid en bewijsbaarheid. In de elementaire propositielogica is elke instantie van ($p \vee \neg p$) formeel bewijsbaar omdat deze een tautologie is. Brouwer stelt het gebruik van zo'n formeel bewijs binnen een groter bewijs ter discussie: dat gebruik verandert in zijn ogen de aard van dat grotere bewijs en maakt het in zijn ogen minder sterk (of zelfs: niet acceptabel)." Deze voorstelling van zaken is onderdeel van de reeds genoemde mystificatie en maakt de kwestie nog een graadje onlogischer. Als het grotere bewijs GB bestaat uit GB = PUD & Rest, en dit grotere bewijs deugt niet, dan is PUD of die Rest te verwerpen, of allebei. Aangezien aan PUD kan worden vastgehouden (het is tautologisch), is die Rest te verwerpen. Het verwerpen van PUD middels het misverstand van WBV is alleen te begrijpen als misverstand en niet als een acceptabele logische stap.

Bovenstaand is reeds uitgelegd in *A Logic of Exceptions* (ALOE, 1981, 2007, 2011), zie hoofdstuk 8 over Brouwer en Intuitionisme, zie de PDF op mijn website. ALOE is besproken door Richard Gill in NAW sept. 2008. ALOE wordt gangbaar door beroepslogici als Van Dalen cs. genegeerd, en dan krijg je inderdaad zulke kromme voorstellingen van zaken zoals nu ook weer in NAW van juni 2014. Mijn advies blijft een parlementair onderzoek naar het onderwijs in wiskunde, zie http://www.ipetitions.com/petition/tk-onderzoek-wiskundeonderwijs. (PM: Bij alleen een onderzoek wordt aangenomen dat wiskundigen netjes de waarheid vertellen, bij een parlementaire enquête moeten zij daarover eerst nog een eed afleggen.)

Volledigheidshalve: Van Atten stelt: "moet onze geest dan toch echt anders in elkaar zitten dan een computer". Als ik het goed begrijp bevat zijn bewijs onzinnige elementen, en daarvoor adviseer ik driewaardige logica, het beste toegepast middels computer-algebra, waarin PUD vervangen wordt door de drieslag *waar of onwaar of onzin*.

M. van Atten en G. Sundholm (2014), *Intuïtionistische logica en het scheppend subject,* Nieuw Archief voor Wiskunde, 5/15 nr. 2 juni, 124-130